

令和 5 年 5 月 26 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03347

研究課題名（和文）離散ソボレフ不等式研究の新展開 - 数理工学への応用

研究課題名（英文）New developments in the research of discrete Sobolev inequalities - Applications to mathematical engineering

研究代表者

永井 敦 (Nagai, Atsushi)

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：90304039

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：差分方程式の境界値問題に対応する離散ソボレフ不等式を導出し、その最良定数および等式を達成する最良ベクトルを求めた。鍵となるのは離散ラプラシアン行列の逆行列またはムーアペンローズ一般化逆行列である。これはグリーン関数の離散化であり、グリーン行列とも呼ばれる。応用上は、切頂正20面体(バッキーボール)を含む1812種類のC60フラレーンの異性体上の離散ソボレフ不等式を導出してその最良定数を求め、T20に対応する最良定数が最も小さい、つまり最も硬いことを数学的に証明した。次に筋交いモデルに対応する離散ソボレフ不等式の最良定数を求め、筋交の配置や向きによって硬さがどうなるのか調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1812通りのC60フラレーン上の離散ソボレフ不等式の最良定数については、化学における問題の数学的基盤を与えた。筋交問題については筋交モデルの変形可能性については、1995年にグラフ理論の立場からの応用が知られていたが、今回は離散ソボレフ不等式という観点から筋交モデルの硬さについての知見が新たに得られたことで建築工学への応用が期待される。次に糸や棒のたわみ問題はオイラーも研究したと言われる古典的な問題であるが、そのグリーン関数を厳密に求め、正値性や再生核構造など丁寧に調べた。離散、連続ともにグリーン関数およびソボレフ不等式研究は数理的側面はもちろん、工学上の諸問題への応用も期待される。

研究成果の概要（英文）：We derived discrete Sobolev inequalities corresponding to certain boundary value problems of difference equations and found the best constant and the best vector, which attains the equality. The key matrix is the inverse matrix or the Moore-Penrose generalized inverse of discrete Laplacian. We call this inverse matrix the Green matrix hereafter. As applications, we found best constants of discrete Sobolev inequalities corresponding to 1812 isomers of C60 fullerene, including truncated regular icosahedron, or Buckyball. We proved rigorously that the best constant corresponding to Buckyball is the smallest, in other words the Buckyball is the most rigid among 1812 C60 isomers. Next, we found the best constant of discrete Sobolev inequality corresponding to braced grids and investigated how the rigidity of a grid depends on the arrangement and orientations of braces.

研究分野：数理工学、差分方程式

キーワード：離散ソボレフ不等式 最良定数 離散ラプラシアン グリーン行列 フラレーン 筋交問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

現代偏微分方程式論の中核をなすソボレフ不等式の最良定数と最良関数、つまり等号成立条件を研究している。先行研究としては、1930年の Bliss や 1975年の Talenti によってあるクラスのソボレフ不等式について部分的解決がなされている。2004年頃から亀高・渡辺・永井(研究代表者)・武村・山岸を中心とするグループは Bliss, Talenti とは別のクラスのソボレフ不等式について最良定数や最良関数を求めた。鍵となるのは微分方程式の境界値問題のグリーン関数と再生核理論である。工学に登場する重要な常微分方程式や偏微分方程式の境界値問題のグリーン関数を求めて、その再生核構造を調べることにより、ソボレフ不等式の最良定数と最良関数を具体的に求める手法を開発した。

2. 研究の目的

微分方程式の境界値問題のグリーン関数とソボレフ不等式への応用については、かなり研究が進んだ。研究代表者は離散可積分系を専門としており、ソボレフ不等式の離散化を 2008年頃から進めている。また数学を専門としつつ、学生時代を主に工学部で、また大阪大学基礎工学部、日本大学生産工学部、そして現任校の津田塾大学学芸学部情報科学科と、数学そのものを研究するというより数学を応用する学部学科に勤務・研究してきたこともあって、数理研究のみならず工学・応用研究にも興味がある。本研究の目的は次の2点である。

- (1) 数理研究：微分方程式や差分方程式の境界値問題のグリーン関数やグリーン行列(離散化されたグリーン関数)を求めて、対応するソボレフ不等式を導出し、不等式の最良定数を求める。
- (2) 応用研究：得られたソボレフ不等式の最良定数や最良関数(最良ベクトル)の工学的意味づけを行うことにより、工学の諸問題の数学的基盤を確立する。

3. 研究の方法

常微分方程式や偏微分方程式の各種境界値問題を設定し、そのグリーン関数を求める。グリーン関数はヒルベルト空間を適切に設定すると、再生核となる。再生等式からコーシーシュワルツの不等式やヘルダーの不等式を適用することにより、ソボレフ不等式を導出する。ソボレフ不等式の最良定数はグリーン関数の対角線値の最大値で与えられ、最良関数はグリーン関数の断面で与えられる。

離散ソボレフ不等式の研究については、各種グラフ上で離散ラプラシアン行列を設定し、その逆行列またはムーアペンローズ一般化逆行列を求める。この行列はグリーン行列と呼ばれ、グリーン関数の離散版である。グリーン行列はヒルベルト空間を適切に設定すると再生核行列となり、再生等式から離散ソボレフ不等式を導出可能である。またグリーン行列の対角成分や列ベクトルを調べることにより、最良定数や等号が成立する最良ベクトルを求めることができる。

4. 研究成果

本研究期間に得られた主要な成果は以下の通りである。

(1) 離散ソボレフ不等式の C60 フラーレンへの応用

本研究成果は、論文 Journal of Physical Society of Japan 84(2015)074004 に発表したバッキーボール C60 フラーレン(切頂正 20 面体)上の離散ソボレフ不等式とその最良定数に関する研究成果を 1812 個の C60 異性体に拡張したものである。1812 個の C60 異性体すべてについて離散ラプラシアン行列を定式化し、そのグリーン行列(ペンローズムーア一般化逆行列)を計算した。グリーン行列はヒルベルト空間を適切に設定すると再生核行列となることが分かった。次に再生等式から離散ソボレフ不等式を導出し、不等式の最良定数を計算した。最良定数はすべて有理数で与えられ、1812 種類の異性体に対応する最良定数を比較したところ、バッキーボール(切頂性 20 面体)に対応する最良定数が一番小さいことを確認した。これはバッキーボールの原子配置が一番安定している、つまり硬いことを数学的に厳密に証明したことになる。本研究成果は 1 編の論文として、JSIAM Letters に掲載された。また本論文は 2021 年度日本応用数理学会論文賞 JSIAM Letters 部門を受賞した。

(2) 離散化された系の撓み問題への応用

2 階差分方程式で与えられる離散化系の撓み問題の 5 種類の境界値問題を設定し、対応する離散ラプラシアン行列を設定し、対応するグリーン行列を求めた。グリーン行列は離散ベルヌーイ多項式やチェビシェフ多項式を用いて表わされ、再生核構造を調べることによって離散ソボレフ不等式を導出し、その最良定数と最良ベクトルを求めた。本研究成果は 1 編の論文として Saitama Mathematical Journal に掲載された。

(3) 棒のたわみ問題への応用

ベルヌーイやオイラーに端を発する棒のたわみ問題のグリーン関数を計算した。本論文では半無限の長さの棒のたわみを記述する 4 階常微分方程式の境界値問題のうち工学的に重要な 4 種類の問題を考察した。グリーン関数を具体的に求めて、その正值性と相互の大小関係（階層構造）を調べた。本研究成果は 1 編の論文として、Mathematical Journal of Okayama University に掲載された。

(4) 離散ソボレフ不等式の筋交い問題への応用

また、離散ソボレフ不等式のグラフ理論への応用として、筋交い問題を考えた。筋交いを入れた長方形の格子に力を加えたとき歪まないようにするにはどのように筋交いを配置すればよいか、これについては 1995 年 B. Servatius によって 2 部グラフを利用した歪まないための必要十分条件が与えられた。本研究では一歩踏み込んで、筋交いの位置は固定して向きだけ変えたとき、どのような向きのとき強度が最大になるか、離散ソボレフ不等式を最良定数の大小比較によって調べることができた。本研究成果は 2021 年 8 月に京都大学数理解析研究所研究集会「可積分系数理の諸相」で研究発表を行い、1 編の論文として RIMS Kokyuroku Bessatsu に掲載された。

また 2000 年頃から行ってきたグリーン関数とソボレフ不等式およびその離散化に関する一連の研究の集大成として、1 冊の書籍「グリーン関数」(亀高惟倫・永井敦・山岸弘幸著) を執筆し、裳華房から出版された。

<https://www.shokabo.co.jp/mybooks/ISBN978-4-7853-1597-9.htm>

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hiroyuki Yamagishi and Atsushi Nagai	4. 巻 34
2. 論文標題 The best constant of discrete sobolev inequality corresponding to a discrete bending problem of a string	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Saitama Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 19--46
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yoshinori Kametaka, Kohtaro Watanabe, Atsushi Nagai, Kazuo Takemura, Hiroyuki Yamagishi, Hiroto Sekido	4. 巻 12
2. 論文標題 The best constant of discrete Sobolev inequality on 1812 C60 fullerene isomers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 49-52
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14495/jsiaml.12.49	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kametaka Yoshinori , Watanabe Kohtaro , Nagai Atsushi , Takemura Kazuo , Yamagishi Hiroyuki	4. 巻 65
2. 論文標題 Positivity and Hierarchical Structure of four Green Functions Corresponding to a Bending Problem of a Beam on a half line	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Math. J. Okayama Univ.	6. 最初と最後の頁 145-173
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18926/mjou/64006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Atsushi Nagai, Akari Kano, Maho Kikuchi, Rikako Uehara	4. 巻 B91
2. 論文標題 The best constant of discrete Sobolev inequalities corresponding to braced grids : deformability and rigidity	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 37-41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 永井敦
2. 発表標題 離散ソボレフ不等式とその応用
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究「可積分系数理の諸相」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Atsushi Nagai, Hiroko Yamaki, Kana Yanuma
2. 発表標題 A difference equation connecting integrable and chaotic mappings
3. 学会等名 Integrable systems, special functions and combinatorics (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 亀高 惟倫、永井 敦、山岸 弘幸	4. 発行年 2022年
2. 出版社 裳華房	5. 総ページ数 200
3. 書名 グリーン関数	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	亀高 惟倫 (Kametaka Yoshinori) (00047218)	大阪大学・その他部局等・名誉教授 (14401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------