

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03349

研究課題名（和文）エネルギー交差に現れるスペクトル・散乱の準古典解析

研究課題名（英文）Semiclassical analysis of spectral and scattering problems on energy-level crossings

研究代表者

渡部 拓也（Watanabe, Takuya）

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：80458009

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、エネルギー交差をキーワードに研究を行った。量子共鳴の準古典分布に関して、藤家-Martinez-渡部(FMW)の一連の研究は、準古典パラメータについて分数べきの虚部をもつ量子共鳴の存在及び分布を明らかにした。これは、単独の場合では現れない連立系ならではの古典軌道の弱い捕捉に対応する量子共鳴と理解できる。

また擬交差間の断熱遷移確率に関しては、2パラメータの問題として、完全WKB法が適用できない場合について考察した。エネルギーの線形交差モデルでは、超局所的な標準形への帰着し、また接触交差モデルでは、FMWの手法を改良したAssal-藤家-樋口の手法により解決することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子共鳴や遷移確率は、スペクトル・散乱理論の研究対象であり、特に準古典解析として、古典軌道といった古典力学特有の性質により量子力学の現象を記述する典型的なトピックである。

本研究の学術的意義は、連立系を扱うことにより、単独の場合には現れない古典軌道をもつシュレディンガー作用素を考察することが可能になり、実際に単独の場合では得られない量子共鳴の存在を明らかにした点である。特に、既存の完全WKB解析や準古典超局所解析の手法では解析できない場合に対する新たな手法を提案したこと、意義も大きく、我々の手法を拡張した最近の結果は、もう一方の研究課題であるLandau-Zenerの公式の一般化にも適用された。

研究成果の概要（英文）：The keyword of this research project is "energy-level crossing". Concerning semiclassical distributions of quantum resonances, our series of works (Fujiie-Martinez-Watanabe) showed the existence and distribution of quantum resonances whose imaginary part is a fractional order with respect to the semiclassical parameter. It can be understood that these resonances are created by a weakly trapped trajectories, which cannot be realized in the case of a single-valued Schrodinger operator.

We also studied a problem of an adiabatic transition probability for avoided crossings and, in particular, a problem to which can not be applied an exact WKB method. The problem in a linear crossing model was solved by Watanabe-Zerzeri by means of a reduction to a microlocal normal form and that in a tangential crossing model has been investigated by Higuchi-Watanabe thanks to the recent approach introduced by Assal-Fujiie-Higuchi.

研究分野：基礎解析学

キーワード：エネルギー交差 準古典解析 量子共鳴（レゾナンス） 遷移確率 完全WKB解析 準古典超局所解析

## 1. 研究開始当初の背景

本研究課題の背景にあるのは、量子力学を記述するシュレディンガー方程式である。シュレディンガー方程式には、プランク定数と呼ばれる物理定数が含まれるが、本研究課題の標題にある準古典解析では、この定数を小さなパラメータとみなし、シュレディンガー方程式の解やシュレディンガー作用素のスペクトルなどの  $\hbar \rightarrow 0$  における漸近挙動を調べる。このような解析を準古典解析と呼ぶのは、極限  $\hbar \rightarrow 0$  において、シュレディンガー方程式の記述する量子力学的描像が対応する古典力学的描像へ帰するというボーアの対応原理に由来する。したがって、 $\hbar$  に関する漸近展開の初項や第二項に、古典力学の不変量、すなわち相空間上の幾何学的保量を見出すことが、ボーアの対応原理の数学的解釈であり、本研究課題の背景である。

本研究課題で取り組んだ対象は、(1) レゾナンス(量子共鳴)と(2) 擬交差間の断熱遷移確率である。ともに準古典解析によるアプローチで取り組んだ問題であるが、物理的背景を含め、以下に述べる。

### (1) レゾナンス(量子共鳴)

レゾナンスとは、シュレディンガー作用素のレゾルベントを、適当な定義域の下、上半平面から下半平面に有理型拡張した際に現れる極である。この複素平面上の点スペクトルであるレゾナンスは、散乱行列の極、ないしは複素領域に傾けた実軸上の固有値(実際には複素固有値)としても得られる。

物理的に、レゾナンスの虚部は量子的粒子の生存時間の逆数に比例すると考えられており、そのため実軸に近いレゾナンスほど重要となる。またレゾナンスの準古典分布と、対応する古典力学との関係については、多くの先行研究があり、本研究でも相空間上の補足された古典軌道の存在とレゾナンスの存在、また“捕捉の強さ”とレゾナンスの虚部の  $\hbar$  に関するオーダーの関係が、非常に興味深い問題となる。

### (2) 擬交差間の断熱遷移確率

断熱遷移確率とは、遷移確率と呼ばれる物理量の断熱極限のことである。本研究における遷移確率とは、正規化された Jost 解の基底変換行列の非対角成分の絶対値の二乗である。ここで Jost 解とは、一般に散乱問題で扱われる遠方で適当な漸近条件をみたす解を意味するもので、本研究においては、Jost 解は時間  $\pm$  でエネルギーの固有状態を表すものである。2つのエネルギーの時間発展がギャップをもつ場合において、一方のエネルギーに対応する固有状態が時間発展する際、他方にエネルギーに対応する固有状態へ移り変わることは、古典力学的にあり得ない。しかし量子力学的には、そのような移り変わり(遷移)が量子効果として起こり得る。この時間発展を時間依存シュレディンガー方程式とみると、準古典パラメータは断熱パラメータと呼ばれ、ボーアの対応原理は断熱定理と読み替えられる。この点において、断熱遷移確率は準古典解析によるアプローチが有効なトピックである。

研究課題にあるように、2準位のエネルギーの時間発展が互いに交差するとき、その交差の相互作用から2準位系全体のエネルギーは互いに交差を回避する状況が生じる。この現象は擬交差と呼ばれ、エネルギーギャップをもつ量子系の典型的なモデルである。特に、エネルギー準位が1次関数であるとき、遷移確率は Landau-Zener の公式(1932)で与えられることが知られている。これに端を発し、エネルギー交差やそれを記述するハミルトニアンを一般化した際に、Landau-Zener の公式がどのように一般化されるかが今回の研究課題の背景となる。

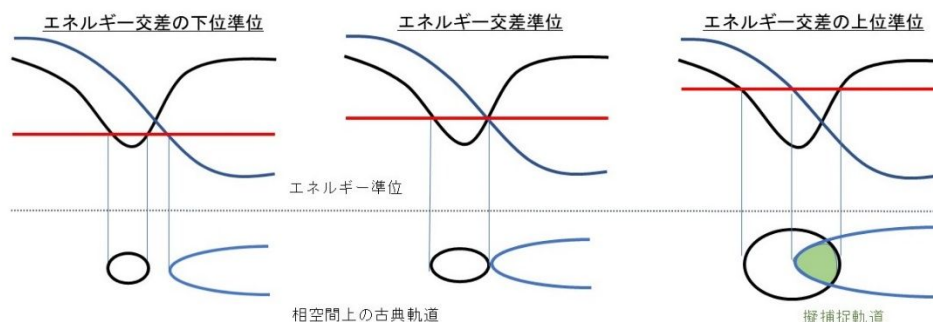
## 2. 研究の目的

前節同様に、取り組んだトピックごとに記載する。

### (1) レゾナンス(量子共鳴)

この課題では、2元連立1次元シュレディンガー方程式系を考察する。これは、対角成分をシュレディンガー作用素、相互作用を表す非対角成分を1階の微分作用素とする行列値作用素の固有値問題である。この行列値作用素は、数学的には、2つのシュレディンガー作用素を連立させた一般化という素朴な見方も可能であるが、本来、分子ダイナミクスを記述する多体シュレディンガー方程式に対して、ボルン=オッペンハイマー近似、グルーシン問題に基づく簡約化によって得られる行列値作用素である。この簡約化は、共同研究者の Martinez 氏らの仕事(1992)において、準古典解析により数学的に定式化されたものの、行列値作用素のレゾナンスの先行研究については Grigis-Martinez 両氏の仕事(2014)や中村周氏の仕事(1995)などに限られ、未開拓な分野といえるものであった。行列値作用素に含まれる2つのシュレディンガー作用素のポテンシャルエネルギーの一方は井戸型(結合エネルギー)、他方は減衰するもの(非結合エネルギー)とすると、2つのエネルギーは交差する。エネルギー交差準位に対する相空間において、このエネルギー交差点は、井戸型が生成する周期軌

道と他方が生成する散逸軌道が接する点であり、不動点のような弱い補足が存在する。またエネルギー交差下位準位に対する相空間においては、周期軌道と散逸軌道は分離され“島の中の井戸”と呼ばれる強い補足が存在する。前者は、我々の共同研究（藤家-Martinez-渡部 2016, 2017）により、レゾナンスの虚部が  $\hbar$  の分数幂で与えられることが明らかになり、後者は、蘆田氏の研究（2018）により、レゾナンスの虚部が  $\hbar$  に関して指数減衰することを明らかになった。一方、交差上位準位では、周期軌道と散逸軌道によって疑似的に生成される捕捉された軌道が存在する。この 2 元連立ならではの“捕捉の強さ”がレゾナンスの虚部にいかに影響するかというのが本課題の大きな目的である。



## (2) 擬交差間の断熱遷移確率

この課題では、時間依存シュレディンガー方程式をモデルとする 2 元連立 1 階常微分方程式系を考察する。2×2 行列値で与えられたハミルトニアンは、トレースがゼロとなる行列で、有限個の零点をもつパラメータに依存しない関数  $V(t)$  を対角成分に符号が異なる形でもつものとする。対角成分自体はそれぞれ、自身の零点において交差する 2 つの時間発展エネルギーを表す。さらに、この交差の相互作用を、非対角成分に小さなパラメータで与えるものとする、系全体の 2 準位エネルギーであるこの行列の固有値は、擬交差を実現する。ここで注意したいのは、この方程式系は、時間依存シュレディンガー方程式に含まれる断熱パラメータ  $\hbar$  と相互作用パラメータ という 2 つの小さなパラメータを含むものとなり、本研究課題は 2 つのパラメータに関する漸近解析となる。

Landau-Zener の公式の一般化を目論むこの課題では、ハミルトニアンを行列値作用素から一般的作用素に拡張するのではなく、対角成分の  $V(t)$  を、特に零点の性質に関して一般化する方針で研究を行った。前者の先行研究では、主に関数解析的手法によるアプローチが行われ、準古典解析の理論的な整備を経て、準古典超局所解析によるアプローチも行われた。一方、後者の先行研究では、特殊関数を用いた断熱近似や古典的な WKB 近似によるアプローチが主であったが、近年、2 元連立 1 階常微分方程式系の完全 WKB 解析の整備により、 $V(t)$  の零点が退化した場合も含め、本研究課題の出発点となる結果（渡部 2006、渡部-Zerzeri 2012）が得られている。

本研究で扱う方程式系に対し、完全 WKB 解析を適用する際、先に述べたように 2 つのパラメータを含む問題であるという点は興味深い。この観点から研究の目的について言及する。発散級数である WKB 解を真の解と対応付けることを数学的に厳密に議論する上で、変わり点と呼ばれる WKB 解析特有の特異点は重要である。事実、擬交差のモデルにおいて、この変わり点は複素平面上的の交差点であり、相互作用パラメータ依存して合流するという問題を孕む。完全 WKB 解析による自身の先行研究において、遷移確率の漸近挙動が、変わり点を通るストークス曲線（アイコナル方程式の解の実部の等高線）の幾何学的構造により特徴づけられ、さらには完全 WKB 解析が有効な  $\hbar$  と の 2 つのパラメータの関係を与えた。特に後者については、 $V(t)$  の零点が退化した場合についても議論し、その関係が退化次数によって特徴づけられることも明らかにしている。一方、2 パラメータの問題として、完全 WKB 解析が有効でない場合については未解決であり、この点にアプローチすることが本研究課題の目的であった。

## 3. 研究の方法

先と同様に、取り組んだトピックごとに記載する。

### (1) レゾナンス（量子共鳴）

この研究課題は、André Martinez 氏（ポロニヤ大学）と藤家雪朗氏（立命館大学）との共同研究によって進めた。この共同研究は我々の 2 つの先行研究に続くもので、研究の方針は、同様に「解の構成」と「量子化条件の導出」がポイントになる。前半では、対角成分の単独のシュレディンガー作用素の基本解を用いた逐次近似法で

ベクトル値関数の解を構成する。その基本解の性質により、準古典パラメータに関して解の良い評価を得ることで、後半の量子化条件からレゾナンスの虚部の詳細な情報を抽出する、ということがこの研究のポイントになる。

エネルギー交差準位を扱った先行研究では、2つの対角成分の基本解のいずれか一方が楕円型に由来する良い性質を持っており、基本解を逐次施す際に、良い性質をもった基本解が他方の悪い部分を上手くケアしたところが妙手であった。本研究課題であったエネルギー交差の上位準位では、基本解がともに楕円型とならない場合が生じ、先行研究と同様の手法だけでは、量子化条件からは井戸型のポテンシャルに由来する固有値の近傍のレゾナンスの存在は確かめられるものの、その虚部に関して十分な情報を抽出することができない。

そこで本研究では、レゾナンス及びレゾナント状態(一般化固有関数)の存在が確かめられたことを出発点とし、レゾナント状態を超局所 WKB 解として与えることで、超局所的な接続から、レゾナンスの虚部の  $\hbar$  に関する漸近展開を詳細に計算した。この点は、先行研究の方法と大きく異なる点である。

#### (2) 擬交差間の断熱遷移確率

この研究は、本研究課題の本来の実施期間に加え、コロナ禍における延長期間においても継続して進められたものである。本来の期間においては、Maher Zerzeri 氏(パリ13大学)との共同研究として遂行し、延長期間においては、樋口健太氏(愛媛大学)との共同研究として行った。前節2.(2)で述べたように、完全 WKB 解析が有効でない場合について調べるということは、変わり点近傍の WKB 解に代わる別の解、すなわち変わり点が含まれる  $V(t)$  の零点近傍で有効な漸近展開を持ち、かつ解空間の基底となる局所解を導入すること、さらには WKB 解の変わり点近傍の接続公式に代わる局所解の接続公式を得ることに他ならない。そこで、実施期間前半の Zerzeri 氏との共同研究では  $V(t)$  の零点が非退化な場合を扱い、ウエバー方程式に対応する超局所的な標準形に帰着するという手法を採用した。

次に、 $V(t)$  の零点が退化した場合について考察することが自然となるが、この場合、特殊関数を背景にもつ超局所的な標準形は知られていないため、実施期間前半では方針が立たない状況であった。しかし、もう一方の課題であるレゾナンスの研究で培われた手法を援用する方針で研究を始め、近年その手法の一般化に成功した樋口氏と共に、実施延長期間において、対角成分の作用素の基本解を用いた解の構成、及び退化した停留点に対する停留位相法を用いる手法を採用した。

### 4. 研究成果

こちらも同様に、取り組んだトピックごとに記載する。

#### (1) レゾナンス(量子共鳴)

この研究課題に関しては、当初の計画以上に進展したと認められる。これまでの先行研究同様に、井戸型の生成する固有値の複素近傍にレゾナンスが存在することを示し、その虚部の漸近展開の主要部が  $\hbar$  の2乗のオーダーであることを示した。特筆すべきは、主要部に、2つの古典軌道が生成する擬捕捉軌道の幾何学的不変量(擬捕捉軌道に囲まれた部分の面積)が明示的に現れることを示したことである。また、このエネルギー交差の上位準位についての結果を得たことにより、エネルギー交差の下位準位の蘆田の結果を含め、先行研究のエネルギー交差準位の結果と矛盾なく説明できることが分かったことが非常に大きい。

#### (2) 擬交差間の断熱遷移確率

この研究課題に関しても、完全 WKB 解析が適用できない場合について、遷移確率の断熱極限における漸近展開を得るに至った。特に  $V(t)$  が有限個の非退化な零点を持つ場合に、遷移確率が、零点の個数の偶奇に応じて0ないしは1に漸近することを示した。結果そのものは、Landau-Zener の公式から類推されるものの、完全 WKB 解析が有効な場合に遷移確率は  $\hbar$  に関して指数的に小さいという断熱定理の帰結に反する結果が得られたという点は興味深い。また、遷移確率の断熱極限における漸近展開、特に初項まで具体的に与えたことにより、有限個の擬交差の間の量子効果を明示的に与えることが可能となった。これにより、典型的なケースにおいて、完全反射や完全透過が起こるための必要条件を、 $V(t)$  と  $-V(t)$  が囲む面積が量子化される条件として与えることに成功した。この結果はボーア=ゾンマーフェルトの量子化条件のアナロジーとしても非常に興味深い。

3.(2)節の後半に述べた延長期間から継続して行われている課題、すなわち  $V(t)$  の零点が退化した場合についても概ね順調に進行しており、次の研究課題に引き継がれている。具体的には、各零点の退化次数の和の偶奇により、遷移確率が0ないしは1に漸近することが確かめられた。特に、最も大きな退化次数から定まる  $\hbar$  と の条件下で、先行研究(非退化な場合)を含む形で、漸近展開の初項を具体的に求めることに成功した。これにより、 $\hbar$  と に関する様々な条件下での遷移確率の漸近挙動を調べる足掛かりが得られたことになり、今後の研究において大きな意義がある。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Watanabe Takuya, Zerzeri Maher	4. 巻 11
2. 論文標題 Landau-Zener formula in a “non-adiabatic” regime for avoided crossings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Analysis and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13324-021-00515-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 M. Dimassi, T. Watanabe	4. 巻 2195
2. 論文標題 Schroedinger operator with constant magnetic field and slowly varying perturbation on a multidimensional strip region	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 128-147
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 S. Fujiie, A. Martinez, T. Watanabe	4. 巻 1
2. 論文標題 Resonances for a System of Schroedinger Operators above an Energy-Level Crossing	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Spectral Theory and Mathematical Physics, Latin American Mathematics Series	6. 最初と最後の頁 153-170
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujiie S., Martinez A., Watanabe T.	4. 巻 280
2. 論文標題 Widths of resonances above an energy-level crossing	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 108918-108918
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2020.108918	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計18件（うち招待講演 17件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 渡部 拓也
2. 発表標題 小さなギャップをもつ擬交 差間の非断熱遷移問題に対 する準古典解析
3. 学会等名 愛媛大学 解析セミ ナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takuya Watanabe
2. 発表標題 Two-level adiabatic transition probability for small avoided crossings generated by tangential intersections
3. 学会等名 The 19th Linear and Nonlinear Waves（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡部 拓也
2. 発表標題 Zakharov-Shabat 方程式系の準古典解析
3. 学会等名 津田塾大学PDE Workshop（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takuya Watanabe
2. 発表標題 Two-level adiabatic transition probability for small avoided crossings generated by tangential intersections
3. 学会等名 RIMS Workshop Spectral and Scattering Theory and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡部拓也
2. 発表標題 小さなギャップをもつ擬交差間の非断熱遷移問題に対する準古典解析
3. 学会等名 愛媛大学解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡部拓也
2. 発表標題 Two-level adiabatic transition probability for small avoided crossings generated by tangential intersections
3. 学会等名 The 19th Linear and Non-linear Waves（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡部拓也
2. 発表標題 Zakharov-Shabat 方程式系の準古典解析
3. 学会等名 津田塾大学PDE Workshop（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡部拓也
2. 発表標題 y for small avoided crossings generated by tangential intersections
3. 学会等名 RIMS共同研究 スペクトル・散乱理論とその周辺（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡部拓也
2. 発表標題 複数の接触交差が生成する小さな擬交差間の2準位断熱遷移確率
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡部 拓也
2. 発表標題 2準位擬交差間の非断熱遷移問題に対する準古典解析
3. 学会等名 神楽坂解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuya WATANABE
2. 発表標題 Widths of resonances above an energy-level crossing
3. 学会等名 Seminaire: Problemes Spectraux en Physique Mathematique (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya WATANABE
2. 発表標題 Semiclassical approach to a generalization of the Landau-Zener formula.
3. 学会等名 Groupe de travail Analyse semi-classique & Physique mathematique (招待講演)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 渡部 拓也
2. 発表標題 エネルギー交差の上位準位におけるレゾナンスの準古典分布
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡部 拓也
2. 発表標題 Width of semiclassical resonances above an energy level crossing
3. 学会等名 第11回 名古屋微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya Watanabe
2. 発表標題 Width of semiclassical resonances above an energy level crossing
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡部 拓也
2. 発表標題 Semiclassical distribution of resonances associated with an energy-level crossing
3. 学会等名 HMA セミナー・冬の研究会 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡部 拓也
2. 発表標題 Semiclassical distribution of resonances associated with an energy-level crossing
3. 学会等名 研究集会 第1回 解析学の壺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuya Watanabe
2. 発表標題 Two-level transition problem for avoided crossings in a non-adiabatic regime
3. 学会等名 Mini Workshop on WKB Analysis and Singularity Theory (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Himeji Conference on PDEs  <a href="http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/CHPDE/CPDE.html">http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/CHPDE/CPDE.html</a>  Spectral and Scattering Theory and Related Topics  <a href="http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/rims2019/index.html">http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/rims2019/index.html</a>  Quantum Resonances and Related Topics  <a href="https://qrrt2019.sciencesconf.org/">https://qrrt2019.sciencesconf.org/</a>  Quantum Resonances and Related Topics  <a href="https://qrrt2019.sciencesconf.org/">https://qrrt2019.sciencesconf.org/</a>  スペクトル・散乱理論とその周辺  <a href="http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/rims2019/index.html">http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/rims2019/index.html</a>  偏微分方程式姫路研究集会  <a href="http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/CHPDE/CPDE.html">http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/CHPDE/CPDE.html</a>  偏微分方程式姫路研究集会  <a href="http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/CHPDE/CPDEen.html">http://www.math.ritsumei.ac.jp/takuwatanabe/CHPDE/CPDEen.html</a></p>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	藤家 雪朗  (FUJII E SETSURO)	立命館大学  (34315)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	樋口 健太  (HIGUCHI KENTA)	愛媛大学  (16301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計5件

国際研究集会 Himeji Conference on PDES	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Himeji Conference on Partial Differential Equations	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Quantum Resonances and Related Topics	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Spectral and Scattering Theory and Related Topics	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Himeji Conference on Partial Differential Equations	開催年 2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	パリ13大学	ボルドー大学		
チリ	カトリック大学			
イタリア	ボローニャ大学			