

令和 4 年 5 月 30 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03355

研究課題名(和文) 高階の有理的差分方程式の力学系次数による分類と可積分性の特徴付け

研究課題名(英文) Classification and characterization of the integrability of rational difference equations based on their dynamical degree

研究代表者

WILLOX Ralph (WILLOX, RALPH)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：20361610

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：この4年間、主に可逆な有理的差分方程式やそれと同値である高階な写像、及び高次元の格子上で定義されている非線形な差分方程式、いわゆる非線形偏差分方程式の性質を研究した。前者に関しては、特に様々な既知の可積分系指標、つまり方程式の解の複雑性を測る指標とその方程式に現れる特異点との関係を明らかにし、離散パンルヴェと呼ばれている非常に優れている性質を持つ方程式の特異点に基づく分類を完成した。後者に関しては、偏差分方程式に対して「代数的エントロピー」という有名な可積分系指標が適用できない例をいくつか構成したほか、非線形偏差分方程式における新しい特異点の種類を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形な写像、特に可逆な差分方程式が定める高階の有理写像は代数幾何学や数理物理学などの研究分野で活発に考察され、大いに応用されている数学的道具である。このような写像や方程式に関する研究においては、一般解の複雑性を測る指標を開発すること、及びその指標を写像や方程式が記述する現象と関係づけることが主流のテーマである。この4年間の間に得た研究成果は非線形な写像の性質の理解を大いに深めたと言える。また、格子上の差分方程式は物理学でよく扱われているものの、その数学的性質はまだ殆ど分かっていないため、偏差分方程式に対して得た研究成果がこの分野に大きな影響を与えることを確信している。

研究成果の概要(英文)：Over the last 4 years I mainly studied the properties of reversible rational difference equations (or their equivalent higher order mappings) as well as of nonlinear partial difference equations defined on higher dimensional lattices. Regarding the former, I clarified the relation between the singularities that may appear in such equations, and various known integrability indices (i.e. indices that measure the complexity of the solutions to such equations). I also completed the classification of so-called discrete Painleve equations equations with truly exceptional properties in terms of their singularities. In relation to the latter topic, I constructed several examples for which a particularly well-known integrability index, the algebraic entropy, turns out to be unsuitable, and I also discovered a novel class of singularities that can appear in nonlinear partial difference equations.

研究分野：可積分系

キーワード：離散可積分系 双有理写像 力学系次数 エントロピー 特異点 非自励系 離散化

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

常微分方程式や偏微分方程式の理論は古くから確立した数学の分野であるが、BirkhoffやNörlundの先駆的な貢献にも拘らず、20世紀の大半の間、差分方程式の理論にはほとんど進展がなかったと言わざるを得ない。しかし、1967年に戸田格子が発見されて以来、多数の可積分な非線形偏差分方程式が発見され、連続な可積分系の不思議な数学的構造と性質が、もっと深いレベルで差分方程式系に存在することがだんだん明らかになってきた。その後、1990年前後に離散Painlevé方程式が発見され、数理論理学（例えば、2次元の量子重力理論[FIK91]）に広く応用できることが明らかになったため、離散可積分系の研究がようやく活発になってきた。その結果、理論的な面では、坂井の離散Painlevé方程式の幾何学的な記述[S01]や離散可積分系のcluster代数とLaurent現象[FZ02]の代数的及び組み合わせ論的な読み替えなど、離散可積分系分野に革命的な影響を及ぼした進展もあり、応用の面でも、可積分系の研究が様々な分野で新しい結果をもたらした。例えば、離散的解析関数の新しい非線形理論[BMS05]、差分作用素のためのNevanlinna理論[HK06]、又は特殊関数論、特に直交多項式の理論[SP95]への寄与はその影響の典型的な例である。一方、この20年間、離散可積分系について得られてきた重要な結果のほとんどは2階の可積分な有理的常差分方程式についての結果である。本研究計画の主題である高階の有理的差分方程式または偏差分方程式については、研究開始当初、ほとんど研究が進んでいなかった。

研究内容に関する重要な概念：

(1) 特異点と特異点閉じ込め

2階の有理的差分方程式またはそれと関連する \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2 への有理写像の研究では、解析学と複素幾何学や代数幾何学からきたアイデアの融合により、様々な面で目覚ましい発展があった。可積分な有理的差分方程式の研究において最も大きな影響を及ぼしたのは、「特異点閉じ込め」[GRP91]という概念であろう。特異点閉じ込めは、方程式の発展に伴って現れる特異点、つまり初期値に対する情報を喪失してしまう点が、その後、無限に伝播せず有限の領域にとどまるという方程式の特殊な性質である。これは2階の常微分方程式におけるPainlevé性（方程式の動く特異点は全て極であるという性質）と類似した現象とされるが、実は、 \mathbb{C}^2 上の双有理写像がblow-upで、ある種の曲面の自己同型に帰着できるための十分条件とも解釈できる。しかしながら、特異点閉じ込めという性質を持つ方程式が必ずしも可積分系であるとは限らないため、常差分方程式の可積分性は、最近では、解の増大に関する性質に基づいて定義されることが多い。

(2) 解の増大、力学系次数と代数的エントロピー

可逆な発展を定める2階の常差分方程式の場合、その発展を \mathbb{C}^2 上の双有理写像 $\sigma: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ と見なし、 σ の反復合成 σ^n の次数の増大を計る「力学系次数」を $d(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg(\sigma^n))^{1/n}$ と定義し、代数的エントロピーを $h(\sigma) = \log d(\sigma)$ と定義する。一般の双有理写像の場合には $d(\sigma) > 1$ であり、 $\deg(\sigma^n)$ が指数関数のように増大するが、そうでない場合、つまり $d(\sigma) = 1$ のときには元の方程式は可積分系であるという。特に、 \mathbb{C}^2 上の写像の場合には、 $d(\sigma) = 1$ のとき、 $\deg(\sigma^n)$ が必ず有界であるか n または n^2 のように増大することが知られている[DF01]。さらに、 $\deg(\sigma^n) \sim n$ の場合には、写像（或いは元の方程式）が線形化可能であることも知られており、 $\deg(\sigma^n) \sim n^2$ のときには、元の方程式が、例えば離散Painlevé方程式のように、本質的に非線形かつ可積分な方程式であると言える。

方程式の力学系次数 $d(\sigma) = 1$ のときに、 $\deg(\sigma^n)$ の具体的な漸近的振舞いは代数幾何学的手法[T01]で計算できる。それは通常大変複雑な計算であるが、最近になって、特異点閉じ込めのテストを通じて、方程式が持つ特異点の性質から $\deg(\sigma^n)$ の漸近的振舞いに関する情報を簡単に求める手法が2つも開発された[H17, RGMW17]。

一方、高階の有理的差分方程式の場合または高次元の格子上で定義されている偏差分方程式の場合には、上記のような性質や分類は未だに知られていない。

2. 研究の目的

本研究の一つの目標は、高階の可逆な有理的常差分方程式を、方程式の一般解の複雑性あるいは方程式の可積分性を計る「力学系次数」を用いて分類すること、及び可積分系と判定される方程式のうち線形化可能である方程式とそうでないものの特徴付けを行うことであった。特に、高階の有理的差分方程式の持つ特異点の性質に基づき、その方程式の可積分性や非可積分性を決める力学系次数が容易に計算できる数学的手法を開発することが一つの重要な目的であった。また、まず2階の有理的差分方程式に対して、力学系次数の値を厳密に方程式の特異点構造と結びつけることはもう一つの目的であった。

さらに、上述のように常差分方程式と同様に、2次元や3次元の格子上で定義されている非線形偏差分方程式に対して、方程式の可積分性が予測できる指標を開発すること、または非線形偏差分方程式における特異点の完全な分類を行うことはもう一つの重要な目的であった。また、それ

それぞれの可積分性指標に対して特に優れている性質を持つ離散可積分系の実例を構成し、その系の可積分性を厳密に示すこと、及び連続の可積分系の数学的構造を保つ離散化を構成することをも一つの目標とした。

3. 研究の方法

- (1) 常差分方程式の力学系次数などの可積分性指標に関する研究においては代数幾何学的な道具が重要で、代数幾何学で利用されている概念や手法のほか、自ら開発した計算手法を利用した。
- (2) 特異点閉じ込めはパソコン上のシミュレーションで調べるべき性質であり、特に高階の写像や高次元の偏差分方程式対し、計算が困難である場合が多い。そのために具体的な写像や方程式の特徴に合わせたアルゴリズムを開発する必要があった。
- (3) 高次元の偏差分方程式の代数的エントロピーなどの計算は大変難しく、その計算のためにも特殊なアルゴリズムを開発する必要があった。
- (4) 可積分な離散化という研究テーマにおいては離散的シンプレクティック写像の理論が重要なツールであった。

4. 研究成果

補助事業期間の4年間の間に主に下記の6つのテーマについて研究成果を得た。

(1) 離散 Painlevé 方程式の構成と分類

[このテーマについての研究はすべて Paris-Saclay 大学・CNRS の Basile Grammaticos と Alfred Ramani との共同研究で行った。]

1 d-型又は q-型の $E_8^{(1)}$ の対称性を持つ離散 Painlevé 方程式の退化配列 (cascade) に属する離散 Painlevé 方程式がすべて系統的に構築できる手法を開発し、非 QRT 型の方程式へ拡張することもできた。この研究結果は 2019 年に 2 本の論文で Journal of Nonlinear Mathematical Physics 及び Journal of Mathematical Physics で発表された。

2 非対称な「trihomographic form」と呼ばれている特殊な形で表せる離散 Painlevé 方程式の特異点パターンを分類し、それぞれの特異点パターンに対応する方程式の tri-homographic form を特定した。この研究結果は 2020 年に Journal of Mathematical Physics で発表された。

(2) 力学系次数と写像の特異点の関係、及び高階の有理的写像の特異点に基づく分類

[このテーマについての研究はすべて Paris-Saclay 大学・CNRS の Basile Grammaticos と Alfred Ramani, 及び東京大学の Takafumi Mase との共同研究で行った。]

1 特異点閉じ込め法に基づいて複素平面上の双有理写像の力学系次数が容易に計算できる手法を提唱し、その手法の代数幾何学的な根拠を明らかにした。この研究結果は 2019 年に Journal of Physics A: Mathematical&Theoretical で発表された。

2 高次元の双有理写像における特異点の構造と写像の反復合成による次数増大との関係を考察した。線形化可能な 2 階の方程式の coupling から得られる高次元の写像の特異点と次数増大との関係についての論文は現在作成中である。

(3) 非線形偏差分方程式の代数的エントロピー

[このテーマについての研究は東京大学の Takafumi Mase とフィンランドのトゥルク大学の Jarmo Hietarinta との共同研究で行った。]

2 次元の格子上で定義される偏差分方程式の初期値・境界値問題が方程式の代数的エントロピーの計算にどのような影響をもたらすことを明らかにした。これは研究企画を立てた当初想定しなかった大きな発展であり、可積分系分野で高く評価されている結果である。この結果を発表する一つの論文は 2019 年に Journal of Physics A: Mathematical&Theoretical に掲載済みであり、その結果の数学的根拠を説明するもう一つの論文は現在作成中である。

(4) 非線形偏差分方程式の特異点構造

1 オークランド大学 (ニュージーランド) の Doyong Um と Paris-Saclay 大学・CNRS の Basile Grammaticos と Alfred Ramani との共同研究で、離散 KdV 方程式の簡約における特異点の構造、及び簡約で得られた写像の特異点構造に基づく可積分性判定を考察し、離散 KdV 方程式に特異点閉じ込め性質を持たない特異点が存在することを解明した。この研究結果は 2020 年に Journal of Physics A: Mathematical&Theoretical で発表された。

2 オークランド大学の Doyong Um と Paris-Saclay 大学・CNRS の Basile Grammaticos と Alfred Ramani 及び武蔵野大学の Junkichi Satsuma との共同研究で、離散 KdV 方程式の特異点の完全な分類を行い、ほかの特異点と非自明な相互作用を引き起こす帯型の新しい特異点の種類を発見した。また、その帯型の特異点と対角線型の特異点の相互作用を簡単な symbolic dynamics で記述することにも成功した。この結果は研究企画を立てた当初想定しなかった大きな発展であり、可積分系分野で高く評価されている結果である。この研究結果は 2021 年に Journal of Physics A: Mathematical&Theoretical で発表された。

3 Paris-Saclay 大学・CNRS の Basile Grammaticos とインドのヴェローレ工科大学の Thamizharasi Tamizhmani との共同研究で、離散 KdV 方程式において発見した新しい特異点の全

種類がある種の離散 $mKdV$ 方程式にも存在することを示し、特異点の相互採用を記述する symbolic dynamics が運搬車付き箱玉系の超離散可積分系と一致することを明らかにした。この結果を発表する論文は Journal of Physics A: Mathematical&Theoretical に掲載決定済みである。

(5)超離散可積分系の解法

グラスゴー大学の Jon Nimmo と Claire Gilson との共同研究で、超離散 KdV 方程式の逆散乱問題は、厳密に構成できる undressing 変換と dressing 変換の繰り返しで完全に解けることを証明した。この証明と構成方法を発表する論文は 2019 年に Journal of Physics A: Mathematical&Theoretical に掲載済みである。

(6)連続系の離散化

1 武蔵野大学の Junkichi Satsuma と Paris-Saclay 大学・CNRS の Basile Grammaticos との共同研究で、Motescharrei et al. が 2014 年に社会崩壊のモデルとして提唱した「Human and Nature Dynamics Model」を再考し、もっと一般的な現象を記述するモデルの新しいクラスを構成し、そのクラスに含まれるモデル方程式の離散化を行うために新しい離散化手法を開発した。この結果を発表する論文は 2020 年に Regular and Chaotic Dynamics に掲載済みである。

2 東京大学の Hirofumi Ino との共同研究で、有名な Lorenz 系の可積分なケースの離散化を考察した。具体的には、特殊なパラメーターにおいて楕円関数で求積できる Lorenz 系の可積分性を保つ離散化を 2 つ提唱し、それぞれの離散系の不変量および symplectic 構造などを構成することによってその離散系の Liouville 可積分性を厳密に示した。途中結果は既に conference proceedings に発表されているが、結果の詳細を発表する論文は現在作成中である。

<参考文献>

- [BMS05] A.I. Bobenko, C. Mercat & Y.B. Suris (2005) J. reine angew. Math. **583**, 117-161.
- [DF01] J. Diller & C. Favre (2001) Amer. J. Math. **123**, 1135-1169.
- [FIK91] A.S. Fokas, A.R. Its & A.V. Kitaev (1991) Comm. Math. Phys. **142**, 313-344.
- [FZ02] S. Fomin & A. Zelevinsky (2002) Adv. Appl. Math. **28**, 119-144
- [GRP91] B. Grammaticos, A. Ramani & V. Papageorgiou (1991) PRL **67**, 1825-1828.
- [HK06] R.G. Halburd & R.J. Korhonen (2006) Ann. Acad. Scient. Fenn. **31**, 463-478.
- [H17] R.G. Halburd (2017) Proc. R. Soc. A **473**, 20160831.
- [RGMW17] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Mase & R. Willox (2017) J. Phys. A: Math. & Theor. **50**, 185203
- [S01] H. Sakai (2001) Comm. Math. Phys. **220**, 165-229.
- [SP95] V. Spiridonov & A. Zhedanov (1995) Methods Appl. Anal. **2**, 369-398.
- [T01] T. Takenawa (2001) Comm. Math. Phys. **224**, 657-681.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件/うち国際共著 10件/うちオープンアクセス 10件）

1. 著者名 B. Grammaticos, T. Tamizhmani, R. Willox	4. 巻 未定
2. 論文標題 On the singularity structure of a discrete modified-Korteweg-de Vries equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ac711b	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Um D., Ramani A., Grammaticos B., Willox R., Satsuma J.	4. 巻 54
2. 論文標題 On the singularities of the discrete Korteweg-de Vries equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/abd8f4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Grammaticos Basil, Willox Ralph, Satsuma Junkichi	4. 巻 25
2. 論文標題 Revisiting the Human and Nature Dynamics Model	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Regular and Chaotic Dynamics	6. 最初と最後の頁 178 ~ 198
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1134/S1560354720020045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 B. Grammaticos, A. Ramani, R. Willox and J. Satsuma	4. 巻 61
2. 論文標題 Discrete Painleve equations from singularity patterns: The asymmetric trihomographic case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5115023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 D. Um, R. Willox, B. Grammaticos and A. Ramani	4. 巻 53
2. 論文標題 On the singularity structure of the discrete KdV equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab72af	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Hietarinta, T. Mase and R. Willox	4. 巻 52
2. 論文標題 Algebraic entropy computations for lattice equations: why initial value problems do matter	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab5238	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 J.J.C. Nimmo, C.R. Gilson and R. Willox	4. 巻 52
2. 論文標題 Darboux dressing and undressing for the ultradiscrete KdV equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab45cf	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 B. Grammaticos, A. Ramani and R. Willox	4. 巻 60
2. 論文標題 Restoring discrete Painleve equations from an $E_8^{(1)}$ -associated one	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5084005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox and T. Tamizhmani	4. 巻 掲載確定
2. 論文標題 Constructing discrete Painleve equations: from $E_8^{(1)}$ to $A_1^{(1)}$ and back	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 —
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Mase Takafumi, Willox Ralph, Ramani Alfred, Grammaticos Basil	4. 巻 52
2. 論文標題 Singularity confinement as an integrability criterion	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 —
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab1433	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Ralph Willox
2. 発表標題 The singularity structure of integrable lattice equations
3. 学会等名 Integrable systems 2021, The University of Sydney, Australia (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ralph Willox
2. 発表標題 Discretising and ultradiscretising the “Human and Nature Dynamics Model” — new challenges and the limits of modelling
3. 学会等名 From Nonlinear Waves to Integrable Systems (招待講演)
4. 発表年 2020年

1 . 発表者名 R. Willox
2 . 発表標題 Integrability tests for lattice equations - or why lattice equations are more interesting (and subtle) than ordinary mappings
3 . 学会等名 Integrable Systems 2019, The University of Sydney, Australia (招待講演)
4 . 発表年 2019年

1 . 発表者名 R. Willox
2 . 発表標題 On the direct and inverse scattering problems for $udKdV$
3 . 学会等名 China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2019, Hayama, Japan
4 . 発表年 2019年

1 . 発表者名 R. Willox
2 . 発表標題 Solution to the direct and inverse scattering problems for the ultradiscrete KdV equation
3 . 学会等名 Integrable systems, special functions and combinatorics, Sabhal Mor Ostaig -- the Gaelic College, the Isle of Skye, UK
4 . 発表年 2019年

1 . 発表者名 T. Mase, R. Willox, A. Ramani and B. Grammaticos
2 . 発表標題 Dynamical degrees and singularity patterns
3 . 学会等名 Symmetries and Integrability of Difference Equations : SIDE13 (国際学会)
4 . 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 B. Grammaticos, A. Ramani, R. Willox and T. Mase	4. 発行年 2018年
2. 出版社 CRC Press, Boca Raton FL	5. 総ページ数 30/582
3. 書名 Detecting discrete integrability: the singularity approach, in ``Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures: Volume I''	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>R. Willox Discretising and ultradiscretising the "Human and Nature Dynamics Model" - new challenges and the limits of modelling - Reports of Institute for Mathematics and Computer Science, Tsuda University, 42 (2021) 1-16.</p> <p>H. Iino, R. Willox 可積分な場合のHenon-Heiles系の離散化 Reports of Institute for Mathematics and Computer Science, Tsuda University, 42 (2021) 135-140.</p>
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

<p>国際研究集会 Symmetries and Integrability of Difference Equations : SIDE13</p>	<p>開催年 2018年～2018年</p>
---	----------------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
	機関名	機関番号	担当者	備考
フランス	CNRS		パリ・サクレ大学	
ニュージーランド	オークランド大学			
フィンランド	トゥルク大学			
英国	グラスゴー大学			

共同研究相手国	相手方研究機関			
インド	ヴェローレ工科大学			