

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03358

研究課題名（和文）空間的に不均一な反応拡散方程式の定常問題の解析

研究課題名（英文）Stationary problem of spatially inhomogeneous reaction diffusion equations

研究代表者

中島 主恵（Nakashima, Kimie）

東京海洋大学・学術研究院・教授

研究者番号：10318800

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：集団遺伝学においてNagylakiが導入した遺伝子頻度のモデルを研究した。このモデルは反応拡散方程式を用いて表され、非線形項の空間依存を表す係数 $g(x)$ は符号を変えるとする。詳しくは非線形項は $g(x)u(1-u)$ とする。Lou-Nagylakiの解の個数に関する2つの予想を否定的に解決した。その結果を報告者（2020）報告者-Su(2020)などに発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本方程式の生物学的な意義に加え、数学的な意義は次のようである。非線形項が符号を変えるようなロジスティックタイプの方程式の正值定常解の分岐構造を研究は1970年代から国内外でさかんに行われてきた。非線形項が符号を変えない場合には、数えきれないほどの先行研究があるが、非線形項が符号を変える場合には変えない場合に比べて国内外でも研究が始まったばかりと言ってよく、その解の挙動は数学的にも複雑で興味深い。

研究成果の概要（英文）：We studied the model of gene frequency introduced by Nagylaki in population genetics. This model is expressed using the reaction-diffusion equation, and the coefficient $g(x)$ representing the spatial dependence of the nonlinear term is assumed to change sign. Specifically, the nonlinear term is $g(x)u(1-u)$. Two conjectures about the number of solutions of Lou-Nagylaki have been resolved negatively. The results were announced to Rapporteur (2020) and Rapporteur-Su (2020).

研究分野：非線形反応拡散方程式

キーワード：特異摂動問題 スパイク 遷移層 解の大域的な分岐構造

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

拡散は古くから均一化を促すものと考えられてきた。俣野(1978), Casten-Holland(1979), Hale-Vegas(1984), 神保-森田(1992)により, 単独の自励系において凸領域上の安定定常解は定数解に限ることが明らかになった。`安定定常解なら自明解である`というこれらの結果は, 単独の自励系において拡散はパターン形成を抑制する働きをもつことを示唆している。

一方, 反応項が空間に対して均一でない場合には`安定定常解なら自明解である`という事実は成り立たず, 定常解は安定であっても実にさまざまな形状をもちうるということが知られている。例えば Angenent-Mallet Paret-Peliter(1978) は 1 次元の区間において空間的に不均一な方程式を拡散係数を微小にした状況下で扱い, `遷移層` --- 遷移層とは解の値がほとんど不連続に見えるほど急激に変化している部分である --- を複数個もつ解を多数構成している。

2. 研究の目的

以上のように非線型反応拡散方程式において拡散係数を微小にすると, 解が遷移層やスパイクなどの際立ったパターンを形成することがある。方程式が空間的に不均一な場合には, 不均一性が定常解の構造に大きな影響を与えることが, 申請者を含む国内外の研究によりわかってきた。本研究では空間的に不均一な非線型反応拡散方程式の定常問題を扱い, 不均一性と定常遷移層の位置や形状, 安定性との関連を研究する。また不均一性が定常解集合の構造にあたえる影響, とくに定常解の一意性, 多重度などを研究する。さらに積分平均の項を加えた不均一な非線型反応拡散方程式を扱い, 拡散, 空間的不均一性, 積分平均の3つの要素は釣り合いを保ち定常遷移層を形成するかという問題を解明する。

3. 研究の方法

集団遺伝学において Nagylaki が導入した遺伝子頻度のモデルを研究する。非線形項の空間依存を表す係数 $g(x)$ は符号を変えんとする。本研究では非線形項は $g(x)u^2(1-u)$ とする。 $g(x) > 0$ をみたく場所と $g(x) < 0$ をみたく場所では非線形項がもつポテンシャルの形が本質的に異なることに注意が必要である。

この方程式にたいし, Lou-Nagylaki (2002)は次の予想をした。

予想1. $g(x)$ の上積分が非負という条件のもと, 方程式(E)は一意的非自明(非定数)定常解をもつ。この定常解は漸近安定である

予想2. $g(x)$ の上積分が正という条件のもと, 方程式(E)は非自明(非定数)定常解を丁度2個もつ。1つは漸近安定な定常解であり, もう1つは不安定な定常解である

この予想を証明するべく, まず報告者-Ni-Su(2010)が(E)の遷移層をもつ安定定常解を構成した。ここで構成した解が予想1予想2の漸近安定な定常解である。次に Lou-Ni-Su (2010)は $g(x)$ の上積分が負の条件のもと, 非定数の定常解は少なくとも2つ以上存在することを証明した。

4. 研究成果

以上に続き, 報告者(2016, 2018)は を1次元の区間とし, $g(x)$ に付加的条件をつけ(一度だけ符号を変える, またはある対称性をもつなどの条件), 予想1を厳密に証明した。これら予想1の一意性に関する結果を得るためには, 遷移層をもつ定常解の形状を詳細に評価することが必要であった。解の各部分の decay の order や遷移層の幅などが拡散係数を用いたいかなる関数で表されるか明らかにする必要があり, これらを評価しているうちに Lou-Nagylaki の予想2は成立しないことに気付いた。本年度は次のことを予想2の反例を厳密な議論で構成することに成功した。さらに予想1の反例を構成することにも成功し, その結果を報告者(2020)報告者-Su(2020)などに発表した。

さらに最近の研究論文 Bifurcation structure of an indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics を作成中である。本論文では上記の結果に引き続き上記の遺伝子頻度モデルを扱う。以上での研究では求める解が遺伝子頻度であるため0から1までの解が興味の対象であった。しかし研究を進めるにしたがって0と1の間の定常解の全体像を明らかにするためには自明定常解 $u=1$ からの非定数定常解の分岐構造を調べることが不可欠になることに気づいた。 $u=1$ からの分岐問題の重要性は FeltrinSovrano, Izuhara などの数値実験の結果などからも裏付けられる。このような生物学的な意義に加え, 数学的な意義は次のようである。非線形項が符号を変えるようなロジスティックタイプの方程式の正值定常解の分岐構造を研究は1970年代から国内外でさかんに行われてきた。非線形項が符号を変えない場合には, 数え

きれないほどの先行研究があるが、非線形項が符号を変える場合には変えない場合に比べて国内外でも研究が始まったばかりと言ってよく、その解の挙動は数学的にも複雑で興味深い。同論文では以下のことを証明した。定常解 u が n 回 1 を横切るとき、モード n の解と呼ぶことにする。拡散係数を小さくしていくと定数定常解 $u=1$ からモード 1 の解、モード 2 の解... が順に分岐することが示される。この分岐の枝の解はモードを変えず、大域的に存在する。モード n の解 u は(境界を含めると) $n+2$ 個の極点を持ち、 u が 1 を横切る点と極点は交互に現れる。さらに拡散係数が十分小さいときには、 u が 1 を横切る点 ($u=1$ の零点) は境界点、あるいは非線形項が符号を変える点の付近のみに現れることが証明され、モード n の解の詳細な形状が明らかになった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Nakashima Kimie, Su Linlin	4. 巻 269
2. 論文標題 Nonuniqueness of an indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 4643 ~ 4682
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2020.03.042	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Nakashima Kimie	4. 巻 40
2. 論文標題 Indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 3837 ~ 3855
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Nakashima Kimie	4. 巻 268
2. 論文標題 Multiple existence of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 7803 ~ 7842
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.11.082	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Kimie Nakashima	4. 巻 掲載決定
2. 論文標題 Multiple existence of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.11.082	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kimie Nakashima	4. 巻 掲載決定
2. 論文標題 Indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kimie Nakashima, Linlin Su	4. 巻 掲載決定
2. 論文標題 Nonuniqueness of an indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2020.03.042	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kimie nakashima	4. 巻 264
2. 論文標題 The Uniqueness of an indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1946-1983
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.10.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kimie nakashima	4. 巻 2080
2. 論文標題 Steady- states of indefinite nonlinear diffusion problems in population genetics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 124-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Kimie Nakshima
2. 発表標題 Uniqueness and Multiplicity of Indefinite Nonlinear Diffusion Problem in Population Genetics
3. 学会等名 Recent progress on the reaction-diffusion equations arising in biology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中島主恵
2. 発表標題 Uniqueness and Multiplicity of Indefinite Nonlinear Diffusion Problem in Population Genetics
3. 学会等名 早稲田大学応用解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kimie Nakashima
2. 発表標題 Uniqueness of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics
3. 学会等名 Chemotaxis and Nonlinear Parabolic Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中島主恵
2. 発表標題 ある遺伝子頻度のモデルの非定数定常解の一意性と多重度について
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kimie Nakashima
2. 発表標題 Multiple existence of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics
3. 学会等名 Critical exponent and nonlinear evolution equation 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中島主恵
2. 発表標題 Multiple existence of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中島主恵
2. 発表標題 ある遺伝子頻度モデルに現れるさまざまな形状の定常解の存在について
3. 学会等名 保存則をもつ偏微分方程式の解の正則性, 特異性および漸近挙動の研究 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中島主恵
2. 発表標題 ある遺伝子頻度のモデルの解の一意性について
3. 学会等名 明治非線型数理セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kimie Nakashima
2. 発表標題 Uniqueness and Multiplicity of indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics
3. 学会等名 Recent progress on the reaction-diffusion equations arising in biology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中島主恵
2. 発表標題 Uniqueness and Multiplicity of Indefinite Nonlinear Diffusion Problem
3. 学会等名 「応用解析」研究会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関