

令和 4 年 5 月 17 日現在

機関番号：14101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03365

研究課題名(和文) 準線形双曲型波動方程式系の初期値問題の未開の地～解の長時間存在となめらかさ～

研究課題名(英文) Challenges to unexplored fields of research on the Cauchy problem for systems of quasi-linear wave equations--large-time behavior and regularity of solutions--

研究代表者

肥田野 久二男 (Hidano, Kunio)

三重大学・教育学部・教授

研究者番号：00285090

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：null conditionまたはweak null conditionをみたす非線形波動方程式系に対する初期値問題を考察した。null conditionに関する問題の場合には、Christodoulouが初期値に課していた空間遠方での減衰に関する条件を緩めることが出来た。weak null conditionに関する問題の場合には、扱いが容易に見える3次の項が、2次の項と共存する場合には臨界巾に相当しており、時間大域解の存在を示す際の困難を生じさせていることを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2次および3次以上の高次の項の非線形項にもつ、空間3次元における非線形波動方程式の時間空間大域的な解の存在・非存在を考察することは、幾何学や数理物理学に現れる非線形方程式の解の存在・非存在への応用があり、偏微分方程式論において重要な問題になる。2次の項がnull conditionまたはweak null conditionを満たす場合が、大域的な解の存在を目標とする立場からは大変に重要で、今回の研究期間中に得られた諸結果は国際誌に発表されている。既に海外の研究者による別のアプローチが考案されており、この方面の研究で存在感を放つ基本的な文献になるものと期待される。

研究成果の概要(英文)：The Cauchy problem for quasi-linear systems of wave equations has been studied

under the condition that the null condition or the weak null condition is satisfied. Providing that the null condition is satisfied, we have relaxed the decay condition on the data which Christodoulou assumed for global existence of small solutions. Besides, concerning the problem under the weak null condition, we have found that some cubic terms, "mixed" with a certain quadratic term, are in fact "critical". That is, some cubic terms become a serious hurdle for the proof of global existence result, although they are higher-order terms.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：wave equation null condition weak null condition global existence blow up combined effect

### 1. 研究開始当初の背景

伝播速度が等しい二つの成分  $u, v$  と伝播速度がこれらとは異なる  $w$  という三つの成分からなる半線形波動方程式系の初期値問題を空間 3 次元の場合に考察した. (a) 同一の伝播速度だけを持つ成分から成る系については, Klainerman の null condition が満たされるとき, なめらかで小さな初期値に対する時間大域解の一意存在がよく知られていた. また, (b) 伝播速度がすべて異なるような成分から成る系については, 横山条件が満たされているとき, なめらかで小さな初期値に対する時間大域解の一意存在が知られていた. この(a)にも(b)にも含まれない場合に相当する問題を考察することは自然であり意義があると思われた. 先行結果として, Sideris-Tu, Lindblad-Nakamura-Sogge により, (大雑把な言い方を許してもらおう)「非線形項中, Klainerman の null condition を課せる箇所にはすべて課し, かつ, 横山条件を課すべき箇所にはすべて課す」(これは standard null condition と呼ばれるようになってきている.)ときに, なめらかで小さな初期値に対する時間大域解の一意存在が示されていた. standard null condition が満たされない場合には, Pusateri-Shatah の先行結果があった. Klainerman の null condition が満たされない項の存在が原因で, ある成分の時間変数に関する減衰を悪くすることが解析を難しくしていた. 言い換えると, 問題を興味深く, 挑戦する甲斐があるものにしていた. Pusateri-Shatah が小さな初期値に対する時間大域解の存在証明のために課した条件の一つが, 減衰が悪い成分は(取扱いが容易であろうと考えられる)3次以上の項に含まれるということであった. 取扱いが難しくなると考えられる 2 次の項にそのような成分が含まれることを許容できるかどうかは未解決であった.

### 2. 研究の目的

研究の目的は, 上述の未解決問題に取り組むことであった. とりわけ, 時間減衰の悪い成分が 2 次の項に含まれることを許容し, かつ, その部分に null condition を仮定しないでも, 小さな初期値に対しては時間大域解が存在するような非線形項の形状に関する条件を見つけることを目的とした.

### 3. 研究の方法

Pusateri-Shatah のフーリエ解析に基づく space-time resonance method とは異なり, 基本的にはエネルギーの方法で解析を行った. 伝播速度の異なる成分が系に含まれるので, Klainerman による一般化されたエネルギーの方法が使えない. そのような場合に対処法が現在では幾つか知られており, 今回は Klainerman-Sideris, Sideris-Tu の方法に依った. 実際には, 減衰の悪い成分があるせいで, その方法を補強する必要に迫られた. 幸運にも, 研究代表者が 2001 年頃に見つけていた不等式が Sideris らの方法と Keel-Smith-Sogge 型の重み付き時空評価式に依る方法とを結びつけることに有効であることに気がつき, そのように補強された Klainerman-Sideris, Sideris-Tu の方法を用いて研究を行った. また, Alinhac の ghost weight の方法も評価を閉じる上で役立つものであった. 実際の研究では, これまで共同研究を行ってきた 2 名の研究者と議論を行いながら研究を行った.

### 4. 研究成果

上述の未解決問題を部分的にはあるが解決することに成功した. Keel-Smith-Sogge 型の重み付き時空評価式を使うことで問題特有の困難な箇所を克服できることに気がつき, 研究が進展した.

また, Alinhac の方法や Keel-Smith-Sogge 型の評価式, および Li-Yu 型の評価式を使うことで, 上述の問題とは別に, 同一の伝播速度をもつ成分のみから成る非線形波動方程式系に対する初期値問題を再考した. 1986 年の Christodoulou による結果と比べて, 初期値の空間遠方での減衰に関する条件を大いに緩めるような成果を上げた. 1986 年の Klainerman による結果と比べると, 初期値のなめらかさと空間遠方での減衰に関する条件を大いに緩める結果となった. また, 初期値を原点に関して球対称とすると, 空間遠方での減衰に関する条件が著しく緩められるという, 当初は予想していなかった副産物も手に入れることが出来た. 小さな解を扱うときは扱いが容易と思われる 3 次の項が, 実はそれほど扱いが容易ではないことが, Christodoulou と Klainerman により独立に 1986 年に出版された論文中で扱われた非線形波動方程式系を扱うときの困難な点となり, 工夫の見せ所にもなる. 今回は Li-Yu の評価式を援用した. この不等式は 1991 年に発表されたものであるから真新しいものではないが, 今回の使い方が従来とは異なり

新しかった.

さらに, Li-Yu 型の評価式を一般化した Li-Zhou 評価式を使い, weak null condition を満たす非線形波動方程式系に 3 次の項が加わることで発生する障害を克服できて, 小さな初期値に対する時間大域解に関する結果を得ることも出来た.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Dongbing Zha and Kunio Hidano	4. 巻 142
2. 論文標題 Global solutions to systems of quasilinear wave equations with low regularity data and applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 146-183
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.matpur.2020.05.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kunio Hidano and Kazuyoshi Yokoyama	4. 巻 2020
2. 論文標題 Global existence for a system of quasi-linear wave equations in 3D satisfying the weak null condition	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices. IMRN	6. 最初と最後の頁 39-70
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rny024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kunio Hidano and Dongbing Zha	4. 巻 30
2. 論文標題 Space-time $L^2$ estimates, regularity and almost global existence for elastic waves	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 1291-1307
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/forum-2018-0050	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kunio Hidano and Chengbo Wang	4. 巻 25
2. 論文標題 Fractional derivatives of composite functions and the Cauchy problem for the nonlinear half wave equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica, New Series	6. 最初と最後の頁 25:2
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-019-0460-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kunio Hidano and Dongbing Zha	4. 巻 18
2. 論文標題 Remarks on a system of quasi-linear wave equations in 3 D satisfying the weak null condition	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 1735-1767
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2019082	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kunio Hidano, Kazuyoshi Yokoyama, and Dongbing Zha	4. 巻 -
2. 論文標題 Global existence for a system of multiple-speed wave equations violating the null condition	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.48550/arXiv.1912.03450	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kunio Hidano and Kazuyoshi Yokoyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Global existence for null-form wave equations with data in a Sobolev space of lower regularity and weight	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.48550/arXiv.1909.04969 Focus to learn more	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kunio Hidano and Kazuyoshi Yokoyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Global existence and blow up for systems of nonlinear wave equations related to the weak null condition	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2022058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 肥田野 久二男
2. 発表標題 Keel-Smith-Sogge estimates and nonlinear wave equations with minimal regularity
3. 学会等名 東北大学大学院理学研究科数学専攻 談話会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 肥田野 久二男、横山 和義
2. 発表標題 Global existence for null-form wave equations with data in a Sobolev space of lower regularity and weight
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会（中止になったが講演は成立している）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 肥田野 久二男
2. 発表標題 Space-time $L^2$ estimates, regularity and almost global existence for elastic waves
3. 学会等名 東京理科大学理工学部数学科談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 肥田野 久二男
2. 発表標題 Space-time $L^2$ estimates, regularity and (almost) global existence for quasi-linear wave equations, after Keel-Smith-Sogge and Rodnianski. I, II
3. 学会等名 名古屋偏微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 肥田野 久二男
2. 発表標題 Global existence and regularity of solutions to systems of quasi-linear wave equations satisfying the null condition
3. 学会等名 東北大学 応用数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
中国	Donghua University		