

令和 5 年 6 月 20 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03369

研究課題名（和文）消散構造を持つ偏微分方程式系の新たな安定性条件に基づいた体系的研究

研究課題名（英文）Mathematical analysis based on the new stability condition for dissipative systems of partial differential equations

研究代表者

上田 好寛 (Ueda, Yoshihiro)

神戸大学・海事科学研究科・准教授

研究者番号：50534856

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、気体力学や弾性体力学に起因する微分方程式に関する数学解析を主な目的としており、特に対称双曲型方程式系や双曲-放物型方程式系など一般の方程式系に関する安定性理論の構築を目指している。その一例となる具体的な物理モデルとして、Euler-Maxwell方程式系・Plate方程式系・Timoshenko方程式系などを取り上げながら、方程式の持つ消散構造から引き出される安定性現象に着目し、研究を行なっている。特に、各項が複雑に影響を及ぼしあうような方程式系を考察する際に現れる「可微分性の損失」とよばれる現象について深く解析を行っており、平衡点周りの線形安定性解析に関して研究を進めている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、偏微分方程式系に現れる消散効果が及ぼす解への影響を体系的に捉える点に最大の独自性と創造性がある。様々な物理現象が消散構造を持つ微分方程式系を用いてモデル化されているが、それぞれの物理モデルに関する解析は行われているものの、消散効果に焦点を置くことで一般化を試みているものは少ない。更に、本研究は消散行列に対称性を課さないより一般的な状況を考察しており、このような解析を行った結果はほぼ皆無である。これらの状況のもと、研究業績である一般論の構築によって、双曲型方程式系で表される物理モデルの安定性解析は全て同一手順により行われることとなり、数学的にも物理的にも非常に意義のある結果といえる。

研究成果の概要（英文）：The main purpose of this research is mathematical analysis of differential equations arising in gas dynamics and elastodynamics. Especially, we focus on the stability theory for general systems of equations such as symmetric hyperbolic systems and hyperbolic-parabolic systems. As an example, I am studying the Euler-Maxwell, Plate, and Timoshenko systems as physical models. In particular, I am deeply analyzing a phenomenon called "regularity-loss" that appears when considering systems in which each term affects each other in a complex manner, and I am conducting research on linear stability analysis around equilibrium points.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：安定性解析 可微分性の損失

### 1. 研究開始当初の背景

本研究は、流体力学や弾性体力学などで現れる基礎方程式を一般化した、消散構造を持つ偏微分方程式系の線形化方程式系を研究対象とし、解の挙動を解析することが大きな目的である。考察する偏微分方程式系の緩和項や粘性項に表れる消散行列が対称な場合、Umeda-Kawashima-Shizuta(On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics, Japan J. Appl. Math. 1, 435-457 (1984).) によって時間経過とともに解がどのように減衰するかを示す定量的な時間減衰評価が導かれ、更に Shizuta-Kawashima( Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, Hokkaido Math. J. 14 249-275 (1985).) によって解の時間減衰評価が得られるための条件(安定性条件)が定式化された。この安定性条件は偏微分方程式系に表れる係数行列に対して与えられた代数的条件であり、安定性条件が満たされるとき、対象の方程式系に対応する固有値問題の固有値の実部の詳細な各点評価が得られ、その結果、初期値に適当な可微分性を課せば方程式系の解の時間減衰評価を得ることができる。この安定性条件を用いることで、線形化された Navier-Stokes 方程式系や消散項をもつ線形化 Euler 方程式系、離散型 Boltzmann 方程式系など様々な方程式系の安定性が同一の手法によって解析できることとなり、本研究分野の大きな礎となった。

これら既知の結果では消散行列の対称性が非常に重要であるが、2000 年代に入りその対称性を崩す物理モデルが知られてきた。その例が、梁の振動を記述した Timoshenko 方程式系や、プラズマ現象を記述した Euler-Maxwell 方程式である。これらの方程式系は消散構造を持つ偏微分方程式系で表されるものの消散行列の対称性がないため、既知の結果による安定性条件は適用出来ない。しかしその状況下で、申請者自身によって既知の安定性条件を拡張した新たな安定性条件が Ueda(New stability criterion for the dissipative linear system and analysis of bresse system, Symmetry 10 (2018), no.11, 542.)で提案されている。この新しい安定性条件によって、先述の物理モデルなど多くの偏微分方程式の安定解析が可能となった。しかし、この安定性条件は物理モデルの解析に非常に有用であるが、解の定量的な時間減衰評価との関係性については未解決の問題であった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、上述の背景のもと新たな安定性条件を基に消散項を持つ偏微分方程式系の消散構造の解析を体系的に行い、それによって解の挙動がどう変化するかについて明確にすることである。そのためにも、新たな安定性条件を満たす偏微分方程式系に対して、定量的時間減衰評価を導くことが大きな目標となる。

先述の Ueda(2018)で得られた結果では、対応する固有値問題の固有値の実部の正負性に関する必要十分条件を示しているが、その詳細な評価に関しては未解決のままであった。固有値の実部に関する詳細な評価が得られれば対応した解の時間減衰評価が得られるため、如何に固有値の評価を導くかが本研究の鍵である。

また、本研究で培った技術を生かし、多岐にわたった物理モデルへの応用にも挑戦することも一つの目的である。本研究目的は一般的な偏微分方程式系の安定性解析であるため、上記問題が解決されれば多くの物理モデルの解の減衰評価が得られることとなる。また本研究によって、消散構造に基づいた物理モデルの分類も可能であると考えられるので、この点についても研究を遂行している。

### 3. 研究の方法

研究の方法として、様々な物理モデルに関する数学解析を行うことで消散構造をいかに抽出するかを研究し、そのエネルギー法に基づいた手法を一般化した偏微分方程式系に適用することで問題の解決に挑んだ。具体的には、Liu-Ueda(Decay estimate and asymptotic profile for a plate equation with memory, Journal of Differential Equations 268 (2020), no.5, 2435-2463.)では特殊な消散構造をもった板の振動を記述する偏微分方程式を考察し、Racke-Ueda(The Cauchy problem for thermoelastic plates with two temperatures, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 39 (2020), no.1, 103-129.)では複雑な温度散逸効果を考慮した板の振動を記述する微分方程式系に関して解析を行っている。またさらに、Quintanilla-Ueda(Decay structures for the equations of Porous elasticity in one-dimensional whole space, Journal of Dynamics and Differential Equations 32 (2020), no.4, 1669-1685.)では多孔質弾性体に関する偏微分方程式を扱っており、詳細な安定性解析を行うことで時間減衰評価の導出とその最良性に関して議論を進めている。

また、一般論の構築のための鍵となる相対エントロピー法に由来するリヤプノフ関数についても考察している。具体的には、自身の論文 Ueda(Characterization of the dissipative structure

for the symmetric hyperbolic system with non-symmetric relaxation, *Journal of Hyperbolic Differential Equations* 18 (2021), no.1, 195-219.)における主定理の鍵となる補題の証明でリヤプノフ関数を導入しており、本研究課題の大きな進展となった。さらには、対応する固有値問題に関する漸近展開についても考察を進めており、微分方程式系のもつ消散構造の最適性についても議論を行った。

#### 4. 研究成果

本研究では、Ueda(2018)で申請者自身によって得られた新たな安定性条件の下、解の時間減衰評価を導くために必要な条件について研究を行った。消散行列に対称性がない場合は、Ueda-Duan-Kawashima(Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation and its application, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 205 (2012), no.1, 239-266.)によって既知の結果を包括する新たな理論が提案されている。この新しい理論で扱える方程式系の消散構造はこれまでに知られていたものよりも極めて脆弱であり可微分性の損失と呼ばれている。この理論によって、解析可能な物理モデルが大幅に増えたのであるが、最近の研究によって、Cattaneoの法則を考慮した板の振動方程式など Ueda-Duan-Kawashima(2012)の理論に当てはまらない物理モデルも見つかってきた。このことから、新たな安定性条件と時間減衰評価の導出との間に大きな差があることが予想され、この二つの関連性を明確にすることが本研究の具体的な目標であった。

このような状況のもと、上述の具体的な物理モデルにおける安定性解析を進めることで複雑な消散構造が構成される原理を追求し、一般論の構築に取り組んだ。具体的には、Ueda(2021)によるリヤプノフ関数を用いた安定性解析によって、方程式系のもつ相互作用と消散構造の関連性が明らかになった。またさらに、Maekawa-Ueda(Characterization of dissipative structures for first-order symmetric hyperbolic system with general relaxation, *Mathematics* 9 (2021), no.7, 728.)によってその最良性についても議論が行われており、消散構造の階級に関して一連の結果が得られたことになる。

これら一連の研究によって、複雑な線形偏微分方程式の連立系においても代数的条件を通して消散構造が明確となり、ある種の分類が可能となった。しかし、その分類が最適であるかについては部分的な答えしか得られていない。したがって今後の研究の課題として、その分類の最適性に関する考察と、得られた線形理論を非線形偏微分方程式系の安定性解析へと適用範囲を広げることが考えられる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Maekawa Yasunori, Ueda Yoshihiro	4. 巻 9
2. 論文標題 Characterization of Dissipative Structures for First-Order Symmetric Hyperbolic System with General Relaxation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 728 ~ 728
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/math9070728	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ueda Yoshihiro	4. 巻 18
2. 論文標題 Characterization of the dissipative structure for the symmetric hyperbolic system with non-symmetric relaxation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Hyperbolic Differential Equations	6. 最初と最後の頁 195 ~ 219
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219891621500053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ramon Quintanilla, Yoshihiro Ueda	4. 巻 32
2. 論文標題 Decay structures for the equations of Porous elasticity in one-dimensional whole space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Dynamics and Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1669-1685
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10884-019-09767-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Chun-Hsiung Hsia, Chang-Yeol Jung, Bongsuk Kwon, Yoshihiro Ueda	4. 巻 268
2. 論文標題 Synchronization of Kuramoto oscillators with time-delayed interactions and phase lag effect	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 7897-7939
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.11.090	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Reinhard Racke; Yoshihiro Ueda	4. 巻 39
2. 論文標題 The Cauchy problem for thermoelastic plates with two temperatures	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen	6. 最初と最後の頁 103-129
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/ZAA/1653	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yongqin Liu; Yoshihiro Ueda	4. 巻 268
2. 論文標題 Decay estimate and asymptotic profile for a plate equation with memory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2435-2463
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.09.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ueda, Yoshihiro	4. 巻 10
2. 論文標題 New Stability Criterion for the Dissipative Linear System and Analysis of Bresse System	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry	6. 最初と最後の頁 542
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/sym10110542	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Achleitner, Franz; Ueda, Yoshihiro	4. 巻 18. no.2
2. 論文標題 Asymptotic stability of traveling wave solutions for nonlocal viscous conservation laws with explicit decay rates	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Evol. Equ.	6. 最初と最後の頁 923-946
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-018-0426-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ueda, Yoshihiro; Duan, Renjun; Kawashima, Shuichi	4. 巻 15, no. 1
2. 論文標題 New structural conditions on decay property with regularity-loss for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Hyperbolic Differ. Equ.	6. 最初と最後の頁 149-174
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219891618500066	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ueda, Yoshihiro	4. 巻 264, no.2
2. 論文標題 Optimal decay estimates of a regularity-loss type system with constraint condition	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 679-701
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.09.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 15件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 時間遅れをもつ粘性Burgers方程式の解の性質について
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Characterization of the dissipative structure for the symmetric hyperbolic system with general relaxation
3. 学会等名 East Asian Workshop on Partial Differential Equations in Fluid Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 緩和項を持つ対称双曲型方程式系における消散構造の数学解析
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 久保隆徹，上田好寛
2. 発表標題 時間遅れを考慮に入れたBurgers方程式の時間大域解について
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Characterization of the decay structure for a dissipative linear system and application to the Cauchy problem in thermoelasticity
3. 学会等名 Workshop on Partial Differential Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Stability analysis for the system of linear differential equations
3. 学会等名 The 44th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Characterization of the decay structure for the symmetric hyperbolic system with relaxation
3. 学会等名 XVIII Workshop on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 消散構造を持つ微分方程式系の安定性解析
3. 学会等名 三重偏微分 方程式研究集会 ~ 西原健二先生の古希を記念して ~ (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Dissipative structure for the symmetric hyperbolic system with relaxation in whole space
3. 学会等名 The 7th China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久保隆徹, 上田好寛
2. 発表標題 時間遅れを考慮に入れたBurgers方程式の時間大域解について
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Characterization of the dissipative structure for the symmetric hyperbolic system with non-symmetric relaxation
3. 学会等名 Ito Workshop on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 Stability analysis for a general system of linear differential equations with discrete delays
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 Dissipative structures for thermoelastic plate equations with Cattaneo's law
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 Optimal decay estimates of a regularity-loss type system with constraint
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 New structural condition on decay property for symmetric hyperbolic system with relaxation
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 New stability criterion for the dissipative linear system
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 時間遅れを考慮した微分方程式系の安定性解析
3. 学会等名 2018軽井沢グラフと解析研究集会II (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 Stability criterion for a system of delay-differential equations
3. 学会等名 常微分方程式の定性的理論および数理モデル研究への応用 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Analysis of the dissipative structure for the symmetric hyperbolic system with non-symmetric relaxation
3. 学会等名 Waseda Workshop on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Characterization of the dissipative structure for the symmetric hyperbolic system with non-symmetric relaxation
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 上田好寛
2. 発表標題 消散構造を持つ微分方程式系の安定性解析
3. 学会等名 若手による流体力学の基礎方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihiro Ueda
2. 発表標題 Characterization of the decay structure for a dissipative linear system
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

神戸大学大学院海事科学研究科 http://www.maritime.kobe-u.ac.jp 個人のWebページ http://www2.kobe-u.ac.jp/~ueda/webpage/index.htm
---

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Online Workshop for Nonlinear Partial Differential Equations	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Online Workshop for Nonlinear Partial Differential Equations	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 3rd Workshop on recent development of mathematical fluid dynamics and hyperbolic conservation laws	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------