

令和 5 年 6 月 3 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03371

研究課題名(和文) 宇宙物理学に現れる非線型双曲型偏微分方程式の解の構造

研究課題名(英文) Structure of the solutions to non-linear hyperbolic partial differential equations derived from astrophysics

研究代表者

牧野 哲 (Makino, Tetu)

山口大学・その他部局等 ・名誉教授

研究者番号：00131376

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：宇宙物理学に現れる気体星の構造と発展の数学的研究として、非相対論の枠組みで、球対称平衡解の周りの気体星の摂動について、順圧的なばあいの線型化方程式のスペクトル解析に成功した。断熱的な、順圧的でないばあいについて、所謂g-モードの存在を証明した。また、相対論の枠組みで、一様にゆっくり回転する気体塊にともなう漸近的に平坦な軸対称計量を大域的に構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

宇宙物理学から出典する流体力学の問題について、従来不十分であった数学的に厳密な取り扱いを発展させることは、あらたな数学的技法を生み出し、いっぽうまた物理的諸現象の総合的理解を深めるという学術的意義がある。また、宇宙開発などの社会的に重要な科学技術の応用にたいして理論的基盤を与えることになる。

研究成果の概要(英文)：Astrophysical study of hydrodynamical structure and evolution of stars is important. Through this study project, the following results have been obtained: (1) As for model of gaseous star in the non-relativistic framework, the spectral analysis of the linearized operator for barotropic perturbations around spherically symmetric equilibrium has been done successfully. (2) As for model of gaseous star in the non-relativistic framework, the existence of a sequence of eigenvalues which accumulates to 0 (so called "g-modes") of the linearized operator for adiabatic, but not barotropic, perturbations around spherically symmetric equilibrium has been proved. (3) As for metric generated by uniformly, slowly rotating gaseous mass in the general relativistic framework, the existence of asymptotically flat global axisymmetric metric has been proved.

研究分野：数学

キーワード：星の内部構造 Euler-Poisson方程式 軸対称計量 Einstein-Euler方程式 気体星の振動モード

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

宇宙物理学に現れる非線型偏微分方程式の数学的研究においては、球対称気体星の平衡解の周りでの球対称摂動の非線型発展について、非相対論、相対論いずれの枠組みでも、ほぼ満足できる結果を得ていた。したがって、背景の平衡解が球対称でも摂動は非球対称を許した議論、また、背景が回転する扁平な定常解のばあいの議論へ踏み出すことが本研究開始当初の課題であった。

## 2. 研究の目的

そもそも、宇宙物理学において気体星の流体力学的な内部構造とその発展の研究は重要な課題であり、これまでに多くの研究成果が蓄積されているが、それらの研究の数学的に厳密な正当化はまだ十分ではない。そこで、この問題について数学的に厳密な扱いを確立することが本研究の目的となる。この研究の過程により、物理的にも新たな知見を見出す、あるいは物理的に新たな現象の理解を見出す、また、数学解析の方法の新たなパラダイムを開発する、といったことも研究目的とされる。

## 3. 研究の方法

こうした研究目的を達成するためには、常微分方程式、偏微分方程式、微分積分方程式を広く扱う函数方程式の理論を深く応用しなければならない。そのためには、函数方程式論、函数解析学の基礎的な理論の学びなおしとともに、他の流体力学的な問題の数学的取扱いについて、先行研究を広く学ぶ必要があり、学会、研究集会、セミナーの機会を活用することも研究の方法の一環である。したがって、研究方法としては、図書館での文献閲覧、収集、研究出張のほかは、紙上計算と沈黙考による試行錯誤の遂行以外に特別の方法はない。

## 4. 研究成果

宇宙物理学において得られている気体星の流体力学的な内部構造とその発展の研究の成果を数学的に厳密な正当化し、この問題について数学的に厳密な扱いを確立することが本研究の目的であるが、その際には重力の作用と気体の圧縮性により自由真空境界が発生するため、従来の境界値問題の解析手法がそのままでは適用できず、独自の困難が生じる。この点でいくつかの工夫をねん出して次のような成果を得た。

- (1) 非相対論の枠組みで Euler-Poisson 方程式に支配される気体星について考察し、球対称平衡解のまわりでの順圧的な摂動の発展を支配する線型化方程式に関するスペクトル解析に成功した。① ここで現れる偏微分方程式は厳密には双曲型ではなく、いままで数学で論じてこられなかったものである。したがってこの結果はこの種の発展方程式の解析の嚆矢となり、査読者からも画期的との評価を得ており、また後続研究論文でも多く引用されている。
- (2) 非相対論の枠組みで Euler-Poisson 方程式に支配される気体星について考察し、球対称平衡解のまわりでの摂動の、等エントロピー的でない、順圧的でない断熱的な発展を支

配する線型化方程式に関するスペクトル解析を行い、0 に集積する固有値列（所謂 g-モード）の存在証明に成功した。② 星震学の専門家からは、モード分類の問題の解決ではないにせよ存在証明ということで数学的アプローチとして新鮮だ、という評価を得ている。

- (3) 併せて、地球物理学における大気の振動・波動の問題にかんしても、g-モードの存在を数学的に厳密に解明した。③ この論文は「Featured」「Scilight」に選ばれ、評価された。
- (4) 相対論の枠組みで Einstein-Euler 方程式に支配される回転気体塊の生成する漸近的に平坦な軸対称計量の存在証明に成功した。④ 有界領域での存在は得られていたが、今回さらに古典的ポテンシャル論の手法を活用して漸近的に平坦な大域的存在を証明したもので、相対論の多くのエキスパートが試みて長年未解決であった課題を解決したものであり、意義が大きいものと云えよう。

以上が公刊された主な成果であるが、研究の過程で宇宙物理学、地球物理学に出典する課題のさらなる研究への動機と足掛かりが得られたのも、成果と云える。

文献： ① Juhi Jang & T. M., J. Math. Phys., 61(2020), 051508. ② T.M., Kyoto J. Math., 63(2023), 353-420. ③ T.M., J. Math.Phys., 61(2020), 09150. ④ T.M., Class. Quantum Grav., 38(2021), 134002.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Makino Tetu	4. 巻 63
2. 論文標題 On linear adiabatic perturbations of spherically symmetric gaseous stars governed by the Euler-Poisson equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 353-420
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-10428494	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Makino Tetu	4. 巻 38
2. 論文標題 On the axisymmetric metric generated by a rotating perfect fluid with the vacuum boundary	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Classical and Quantum Gravity	6. 最初と最後の頁 134002 ~ 134002
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6382/abfed3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Juhi Jang, Tetu Makino	4. 巻 61
2. 論文標題 Linearized analysis of barotropic perturbations around spherically symmetric gaseous stars governed by the Euler-Poisson equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 051508-1 ~ -42
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5088843	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Tetu Makino	4. 巻 61
2. 論文標題 On adiabatic oscillations of a stratified atmosphere on the flat earth	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 091510-1 ~ -26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/5.0014743	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tetu Makino	4. 巻 10
2. 論文標題 Recent progress of the study of hydrodynamic evolution of gaseous stars	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 AIMS on Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 531-537
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Makino Tetu	4. 巻 59
2. 論文標題 On slowly rotating axisymmetric solutions of the Einstein-Euler equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 102502-1 ~ -33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5026133	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jang Juhi, Makino Tetu	4. 巻 266
2. 論文標題 On rotating axisymmetric solutions of the Euler-Poisson equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 3942 ~ 3972
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.09.023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件(うち招待講演 4件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 牧野 哲
2. 発表標題 気体星の断熱的非動径振動におけるg-モードの存在について
3. 学会等名 日本数学会2020秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 牧野 哲
2. 発表標題 回転気体塊による漸近的に平坦な軸対称計量の存在について
3. 学会等名 日本数学会2021年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tetu Makino
2. 発表標題 Equations of linear non-radial oscillations of gaseous stars
3. 学会等名 Equadiff 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tetu Makino
2. 発表標題 Vacuum boundary problem of the metric produced by perfect fluid mass
3. 学会等名 BIRS Workshop: Time-like boundaries in General Relativity (19w5140) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tetu Makino
2. 発表標題 On mathematical models of gaseous stars
3. 学会等名 International Mathematical Science Workshop in Yamaguchi (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 牧野 哲
2. 発表標題 球対称気体星の非動径振動について
3. 学会等名 非線形解析セミナー（慶応義塾大学）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 牧野 哲
2. 発表標題 球対称気体星の非動径的断熱振動の方程式の線型化スペクトル解析に関する未解決問題について
3. 学会等名 MPM2019：研究集会「数学と現象」（宮崎大学）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 牧野 哲
2. 発表標題 回転する軸対称気体星の数学的研究
3. 学会等名 日本流体力学学会2018年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Juhi Jang, 牧野哲
2. 発表標題 Spectral analysis of linearized non-radial oscillations of gaseous stars
3. 学会等名 日本数学会2019年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Univcity of Southern California	Department of Mathematics		
その他の国・地域/台湾	中央研究院	数学研究所		
シンガポール	National Univ Singapore	Department of Mathematics		