

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03372

研究課題名(和文)キルヒホッフ方程式の大域可解性問題の解決とそれに向けた変数係数線形波動方程式の解析

研究課題名(英文)Wave equations with variable propagation speed and its application for the global solvability of Kirchhoff equation

研究代表者

廣澤 史彦(Hirosawa, Fumihiko)

山口大学・大学院創成科学研究科・教授

研究者番号：50364732

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本課題における主な研究成果は、キルヒホッフ型非線形波動方程式の大域可解性および変数係数波動方程式の初期値の漸近安定性に関する次の3つの問題に関するものである。(i) 変数係数半離散波動方程式のエネルギー評価；(ii) 時間依存する質量項をもつクライン・ゴールドンがた方程式のエネルギー評価；(iii) 半離散キルヒホッフ方程式の時間大域可解性。いずれの研究も、通常の波動方程式に時間に依存する付加的影響があり、さらにその影響が本質的に摂動とはみなせないような方程式に対してフーリエ解析を応用し時間周波数空間で独自の精密な解析を行うことによって得られた結果である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

キルヒホッフ方程式の大域可解性は偏微分方程式の分野における重要な未解決問題である。また、時間に依存する係数をもつ線形波動方程式の解析は、キルヒホッフ方程式への応用だけでなく、外部から時間に依存した影響を受ける現象の安定性の問題においても重要である。本研究の成果(投稿中を含む)は、応用面ではより現実的な空間変数を離散化した半離散キルヒホッフ方程式の導入とその大域可解性の証明、その線形化モデルである変数係数半離散波動方程式および時間に依存する質量係数がクリティカルな影響を及ぼす可能性があるクライン・ゴールドン型方程式のエネルギーの安定性が成り立つための十分条件を、新たな視点から与えたことである。

研究成果の概要(英文)：The main results in this project concern the following three problems related to the global solvability of Kirchhoff-type nonlinear wave equations and the asymptotic stability of initial values of wave equations with variable coefficients: (i) Energy estimates of semi-discrete wave equations with time dependent coefficients; (ii) Energy estimates of Klein-Gordon type equations with time-dependent mass term; (iii) Global solvability of semi-discrete Kirchhoff type equations. All of the research results were obtained by applying Fourier analysis to equations in which there are additional time-dependent effects on the ordinary wave equation, and furthermore, these effects cannot essentially be regarded as perturbations, and by performing original precise analyses in time-frequency space.

研究分野：数学

キーワード：キルヒホッフ方程式 波動方程式 半離散 変数係数 エネルギー評価

1. 研究開始当初の背景

(1) 時間に依存する係数を持つクライン・ゴルドン型方程式のエネルギー評価

波動方程式やクライン・ゴルドン型方程式などの双曲型方程式において、係数が時間に依存する場合、その影響は時間に依存する外力となるため、解の挙動は定数係数の場合とは大きく異なる可能性がある。このような方程式の初期値問題に対する代表的な解析法の一つとして、フーリエ変換によって時間周波数空間上の常微分方程式系の問題に帰着させる方法がある。しかし、そこで扱う常微分方程式は2階の変数係数の方程式であるため、定数係数(あるいは解の形が良く知られている特別な方程式)の微小な摂動であるような強い仮定無しでは時刻無限大での漸近挙動を評価することは難しかった。伝播速度が時間に依存する波動方程式

$$\partial_t^2 u(t, x) - a(t)^2 \partial_x^2 u(t, x) = 0 \quad (1.1)$$

や消散型波動方程式に対しては数多くの結果が知られているが、質量係数が時間に依存するクライン・ゴルドン型方程式

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) + M(t)u(t, x) = 0 \quad (1.2)$$

に関しては、後述する自明な場合以外にはほとんど研究結果が知られていなかった。

(2) 半離散波動方程式の初期値問題

偏微分方程式の解析において、それ自身を直接的に扱うことが困難な問題な場合、離散化された近似モデルを考察することは問題解決の突破口となる可能性がある。波動方程式の離散化は、時間変数、空間変数、その両方の離散化の3種類が考えられる。時間、または空間変数のみを離散化したモデルは半離散波動方程式と呼ばれるが、特に(1.1)の初期値問題に対して、空間変数のみを離散化したモデルは可算無限の常微分方程式系

$$\frac{d^2}{dt^2} u_k(t) - a(t)^2 (u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)) = 0 \quad (k \in \mathbf{Z}) \quad (1.3)$$

となる。この方程式と連続モデル(1.1)との関連は興味深い問題であるのだが、これまではその意義があまり認識されておらず、ほとんど研究がなされていなかった。また、(1.3)において

$$a(t) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_{n+1}(t) - u_n(t)|^2 \quad (1.4)$$

としたキルヒホフ方程式の半離散モデルに関する研究も同様に知られていなかった。

2. 研究の目的

(1) 既知の研究では、質量係数が時間に依存するクライン・ゴルドン型方程式(1.1)の初期値問題の解のエネルギーの安定性を評価する場合、 $M(t)$ のオーダーが t^{-2} ($t \rightarrow \infty$)であることは本質的であると考えられており、実際にそれを裏付ける具体例も知られていた。しかし、それは $M(t)$ に単調性や正値性を仮定した場合に限られ、その制約にとらわれなければ状況は全く異なる可能性がある。研究代表者による(1.1)や(1.2)などの方程式に対するこれまでの研究による知見から、(1.2)のエネルギーの安定性において本質的な $M(t)$ の性質はオーダーそのものではなく、後述する $M(t)$ の積分によって特徴づけられるある種の振動量であるという予想があり、それを実証することが本研究の主目的である。

(2) 半離散波動方程式(1.3)の初期値問題に関する研究はほぼ未知の領域であるため、本研究はその第一歩として、既知の連続モデル(1.1)に対する結果との類似点と半離散モデルの特性から現れる相違点を明確にし、さらに今後の研究発展の礎を作ることである。

3. 研究の方法

(1) 方程式(1.2)のエネルギー評価を以下のように行う。

- ① 方程式をフーリエ変換し次のような時間周波数空間での方程式を考える。

$$\partial_t^2 v(t, \xi) + \xi^2 v(t, \xi) + M(t)v(t, \xi) = 0 \quad (3.1)$$

- ② $|\xi|$ が相対的に大きい高周波領域で評価を行う。(既存の良く知られた手法を適用)
- ③ $|\xi|$ が相対的に小さい低周波領域で評価を行う。この段階で次の新たな手法を用いるが、ここでの要点は以下の通りである。
- ・低周波領域だけで収束する(3.1)の厳密解を級数で構成する。
 - ・厳密解の級数は $M(t)$ を逐次積分を繰り返すことによって構成される。
 - ・ $M(t)$ の積分量は、 $M(t)$ が定符号の場合はそのオーダーが支配的となるが、符号変化をする場合は振動も重要になる。特に激しい符号変化の振動は積分量の意味では安定性をもたらす可能性がある。
- ④ 解の安定性を規定する新たなエネルギーを導入し、②と③で得られた評価を用いて全領域での評価を導く。ここで $M(t)$ のオーダーが上述の t^{-2} ($t \rightarrow \infty$)ならば(3.1)の保存量は通

常のエネルギーとみなすことができるが、そのオーダーの条件を満たさない本研究で扱うような方程式は通常エネルギーの保存が期待できないため、新たな保存量をエネルギーとして導入する必要がある。

(2) 本研究では、方程式 (1.3) のエネルギー安定性について以下のように解析する。

① 方程式を時間離散フーリエ変換して次のような時間周波数空間での方程式を考える。

$$\partial_t^2 v(t, \xi) + a(t)^2 \xi^2 v(t, \xi) = 0 \quad (3.2)$$

② $|\xi|$ が相対的に大きい高周波領域で評価を行う。ただし、連続モデルと異なり半離散モデルに対する (3.2) は高周波がカットされるため高周波領域での解析は容易になる。

③ $|\xi|$ が相対的に小さい低周波領域で評価を行う。高周波がカットされた結果、低周波の評価に余裕が生ずるため、連続モデルでは扱えなかった特異性をもつ係数についても考察が可能になる。

④ ②と③で得られた評価を用いて全領域でのエネルギー評価を行う。

⑤ 半離散キルヒホフ方程式に対して上記の手法を応用し、時間大域可解性を証明する。

4. 研究成果

(1) クライン・ゴルドン型方程式 (1.2) の初期値問題の解のエネルギー評価において、質量係数 $M(t)$ が既存の手法では扱うことが困難な以下の場合：

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^2 M(t) = \infty$$

において、適切なエネルギーとその安定性に寄与し $M(t)$ の振動をコントロールする積分量で記述されたあらたな仮定を導入することによってエネルギーの漸近評価を得ることができた(論文 [1])。さらにこの結果を改良・精密化し、波動方程式 ($M(t) = 0$) と比較したエネルギーの漸近安定性の評価を得た(論文 [3])。

(2) 伝播速度が時間に依存する半離散波動方程式 (1.3) の初期値問題のエネルギーの一様有界性が成り立つための係数 $a(t)$ に対する十分条件を与え、連続モデル (1.1) に対する既存の研究結果との関連性を考察した。さらに、通常エネルギー評価が成り立たない、 $a(t)$ の特異性によってある種の滑らかさの損失が生ずる問題に対して、数列で与えられる半離散モデルの初期値に対して新たな数列空間を導入し、滑らかさの損失を考慮したある種のエネルギー評価が成り立つための条件についても考察した(論文 [2])。さらに、この線形半離散波動方程式の評価を応用し、半離散キルヒホフ方程式 (1.3)-(1.4) の時間大域可解性を証明した(プレプリント・投稿中)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazunori Goto, Fumihiko Hirose	4. 巻 1
2. 論文標題 On the Wave-Like Energy Estimates of Klein-Gordon Type Equations with Time Dependent Potential	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Trends in Mathematics	6. 最初と最後の頁 635 ~ 646
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-031-36375-7_48	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fumihiko Hirose	4. 巻 496
2. 論文標題 On the energy estimates of semi-discrete wave equations with time dependent propagation speed	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2020.124798	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fumihiko Hirose	4. 巻 -
2. 論文標題 On The Energy Estimate for Klein-Gordon Type Equations with Time Dependent Singular Mass	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Analysis, Probability, Applications, and Computation: Proceedings of the 11th ISAAC Congress (Sweden) 2017	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件（うち招待講演 3件／うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Fumihiko Hirose
2. 発表標題 Global solvability for semi-discrete Kirchhoff equation
3. 学会等名 14th International ISAAC Congress (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 Remarks on the oscillation frequency of time dependent coefficient for the energy estimates of wave equations
3. 学会等名 松本偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 変数係数波動方程式と半離散波動方程式の初期値問題
3. 学会等名 第39回 松山キャンプ
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 五島和徳
2. 発表標題 On the wave-like energy estimates of Klein-Gordon type equations with time dependent potential
3. 学会等名 駿河台偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 半離散型キルヒホフ方程式の大域可解性
3. 学会等名 駿河台偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 五島和徳
2. 発表標題 On the wave-like energy estimates of Klein-Gordon type equations with time dependent potential
3. 学会等名 第38回 松山キャンプ
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 Kirchhoff 型半離散波動方程式の大域可解性について
3. 学会等名 第38回 松山キャンプ
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Fumihiko Hirosawa
2. 発表標題 On the energy estimates of semi-discrete wave equations with time dependent propagation speed
3. 学会等名 13th ISAAC Congress (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 伝播速度が時間に依存する半離散波動方程式のエネルギー評価
3. 学会等名 半田山偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 時間に依存するポテンシャル項を持つクライン・ゴルドン型 方程式のエネルギー評価
3. 学会等名 2021 年度 RIMS 共同研究 (グループ型) 時間依存するハミルトニアンに対する散乱理論 および超局所解析の新展開 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 Kirchhoff 型半離散波動方程式の大域可解性
3. 学会等名 第 37 回 松山キャンプ
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 変数係数波動方程式・半離散波動方程式のエネルギー評価
3. 学会等名 Saga Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 On the energy estimates of semi-discrete wave equations with time dependent propagation speed
3. 学会等名 第 36 回 松山キャンプ
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 F. Hiroswa
2. 発表標題 Energy estimates for Klein-Gordon type equations with time dependent mass
3. 学会等名 12th International ISAAC Congress (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 F. Hiroswa
2. 発表標題 Some properties of time dependent propagation speed of the wave equation for the estimates of low frequency energy
3. 学会等名 12th International ISAAC Congress (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 F. Hiroswa
2. 発表標題 Recent progress on the wave equations with time dependent propagation speed
3. 学会等名 Anomalies in Partial Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 変数係数離散型波動方程式のエネルギー評価
3. 学会等名 第35回 松山キャンプ
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 On the energy estimate for Klein-Gordon type equations with time dependent singular mass
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 On the energy estimate for Klein-Gordon type equations with time dependent singular mass
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 On the energy estimate for Klein-Gordon type equations with time dependent singular mass
3. 学会等名 名古屋偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 変数係数波動方程式の低周波領域における評価とその応用
3. 学会等名 第25回超局所解析と古典解析
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣澤史彦
2. 発表標題 変数係数波動方程式の低周波領域における評価とその応用
3. 学会等名 第34回松山キャンプ
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関