

令和 6 年 6 月 13 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03373

研究課題名(和文)非線形放物型方程式に内在する非自己相似的特異性の分類

研究課題名(英文)Classifications of non-self-similar singularities in nonlinear parabolic equations

研究代表者

関行宏 (Seki, Yukihiro)

東京都立大学・理学研究科・准教授

研究者番号：50728970

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題はべき乗型非線形項を持つ半線形熱方程式や調和写像流方程式を含む様々な非線形放物型方程式で現れる非自己相似的な特異性の形成に関してその諸性質を明らかにした。特に性質の著しく異なる境となる臨界指数と呼ばれる状況に対して、爆発問題における長年の未解決問題の解決を含む大きな成果を得た。この問題の解決を通して得た技術を応用して、調和写像と呼ばれる Dirichlet エネルギーを最小化する写像の特異点解析において偏微分方程式論により記述できる設定を行った上で、解の定量的性質を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

べき乗型非線形項の強さを示す重要な数に Joseph-Lundgren の臨界指数があり、それを境として解の構造が著しく変化する。臨界指数に丁度等しいべきでは様々な情報が退化するため、多くの重要な問題が未解決であった。その一つである本質的に自己相似的でない爆発解が存在問題に対して、初めて肯定的な解決を与えた。また、別の臨界指数についてこの手法を応用し、既存の爆発構造の退化版の存在を証明した。さらにその技術を駆使して微分幾何学に現れる調和写像流方程式に対する爆発解の解析に取り組み、特異性解析の詳しい描写に成功した。これらの成果により、非線形現象の解明に着実な進歩を与えた。

研究成果の概要(英文)：In this project, we have studied non-self-similar singularity formation for various nonlinear parabolic problems including semilinear heat equation with power nonlinearity and harmonic map heat flow. In particular, for the critical exponent at which several qualitative properties of solutions drastically change, we have solved one of the major open problems concerning blowup phenomena. Besides, we studied singularity formation arising in the heat flow for harmonic maps, maps minimizing the Dirichlet energy, and obtained, using the methods developed in the above problem, a qualitative descriptions in terms of the theory of partial differential equations.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：特異性解析 臨界指数 爆発 Type II

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年様々なタイプの方程式で Type II の特異性(非自己相似的特異性)の研究が進んでいる。拡散型に限らず、非線形分散型方程式でも盛んに研究されていたが、非線形項がべき乗のもっとも単純なものであっても指数が整数に限定されるなど、技術的制約がある他、結果自体も本来各点評価を得やすい放物型方程式でルベーグノルムのような大域的性質しか得られていないなど、個々の方程式の特徴を十分反映しているとは言い難い状況であった。

2. 研究の目的

非線形放物型方程式の特異性解析に関する研究は代表的なべき乗型の非線形項をもつ半線形熱方程式であっても、解の様相は一般に非線形べき指数の大きさに依存することが知られていた。すなわち、Joseph—Lundgren の臨界指数と呼ばれる特別な値を境に Type II と呼ばれる、方程式に備えられた自己相似構造と本質的に異なる特異性をもつ解の存在・非存在が知られていた。臨界指数にべき指数が一致する場合は複雑な状況であり、Type II 爆発解の存在・非存在に関して部分的結果さえ分かっていなかった。また、臨界指数より大きい指数で Type II 爆発解の存在が知られている場合であっても、ある種の退化性が強い場合など、繊細な扱いが必要とされる場合は既存の方法がうまく機能せず、不十分な理解に留まっていた。本研究の目的の一つはこれらの複雑な状況を精密な解析法を開発することによって解決することである。この結果と複数の解を比較する既存の方法を組み合わせることにより、特異性の分類理論を大幅に改善させ、球対称解に対する分類を完成させる。また、そこで得られた手法を応用して、調和写像流方程式など関連する非線形問題に対して特異性解析による解の評価を得ることを目的とする。

3. 研究の方法

接合漸近展開法と呼ばれる応用数学に由来する方法と不動点定理を組み合わせることで特徴的な性質をもつ解を具体的に構成した。ある定常解周りの線形化問題を詳細に調べるため、非線形項を Dirac のデルタ関数を用いて近似することが本研究での鍵となる。Dirac デルタ近似はそれほど一般的に周知されたものではなく、古典的なテイラー近似と比べ難解であり、未発達である。実際、それが初めて成功した Herrero-Velazquez による 2 次元 Keller--Segel 系に関する研究でもその厳密な取り扱いが難解で、原著論文でさえ証明の一部は概要のみに留められている。また、質量保存則を持つ 2 次元 Keller--Segel 系に有効であった方法が、保存量があるとは限らない問題に対して直接適用可能かどうかは自明でない。この点について代表者は漸近級数展開に基づく見通しの良い方法を開発し、望ましい成果を得た。

4. 研究成果

べき乗型非線形項を持つ半線形熱方程式(藤田方程式)に対する球対称解の爆発構造を研究した。その非線形性を示す重要な数に Joseph--Lundgren の臨界指数がある。これは非線形楕円型方程式に対する分岐問題等でも現れ、それを境として解の構造が著しく変化する。優臨界では実際に Type II 爆発する解が存在し、劣臨界では僅かな仮定の下で Type II 爆発する球対称解が存在しないことが 10 年程前の時点で知られていた。その意味で Joseph--Lundgren の臨界指数

が状況を二分していることが分かるが、臨界状況で Type II 爆発が起きるかどうかは全く知られていなかった。本課題でこの未解決問題について取り組み、Diracデルタ近似という強力な手法を発展させることで肯定的な解答を与えた。これはJoseph--Lundgren の臨界指数における Type II 爆発に関する初めての結果になっており、専門学術誌 Journal of Functional Analysis に掲載された。これは本研究の主要な成果の一つである。

非線形性を示すもう一つの重要な数として自己相似解の存在・非存在に関する Lepin の臨界指数が知られている。べきがこの指数に一致するとき、従来から知られている Type II 爆発解とは質的に異なる Type II 爆発解が存在することを証明した。これは以下に述べる 7 次元単位球面に値を取る調和写像流方程式に対する結果と対をなすものだが、半線形熱方程式はより豊富な構造を備えており、空間次元が丁度ある閾値にあるとき、二重の対数補正因子をもつ Type II 爆発解が構成できることも証明した。本論文は専門学術誌 Journal of Differential Equations に掲載された。

ドイツの若手研究者 P. Biernat 氏と行った調和写像流方程式に対する Type II 爆発に関する論文が専門学術誌 Nonlinearity に出版され、本研究課題の主要な成果の一つとなった。調和写像流方程式は球面に値をとる未知関数を考えているため、当然解はベクトル値の関数となるのだが、一般のベクトル値関数を考えているだけでは情報があまりに少ないため、有益な情報を得ることは困難である。そこで解に対して対称性等の条件をある程度課すことで、詳細な情報を得ることが期待できる。特に本研究では球面において極座標表示を用いて一つの角度を従属変数とする性質を持つ解に焦点を当てることで、ベクトル値の微分方程式をスカラー値の微分方程式に帰着させ、解析的にやや取り扱い易い形に変形することで研究を進めた。変形された微分方程式は、従来の研究ではいわゆる藤田方程式と呼ばれる半線形熱方程式との数学的な類似が明らかにされてきたが、非線形項が凸関数でないために生じる技術的な困難性が様々な点で問題となる。そこで本研究ではいくつかの特徴的な良い性質をもつ解の典型例を構成したが、以前のBiernat氏との共著論文では線形化方程式が退化する困難な場合を扱えなかった。この点について、本課題における藤田方程式の研究で得られた技術を応用することで退化性の強い場合も扱うことができ、望ましい結果を得た。これが上記 Nonlinearity 誌に掲載された結果である。

以上の顕著な結果が得られたことにより、2020年度に大阪市立大学数学研究所より数学研究会特別賞が、2021年度に日本数学会函数方程式論分科会より福原賞が授与された。その他、本課題と関連して、いわゆるHardy—Henon 型ポテンシャル項をもつ非線形熱方程式の特異性解析に関する論文を1編、反発及び吸引効果をもつ走化性方程式系に対して空間2次元に関するまとまった結果を2編学術専門誌において発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Nagai Toshitaka, Seki Yukihiro, Yamada Tetsuya	4. 巻 121
2. 論文標題 Boundedness of solutions to a parabolic attraction-repulsion chemotaxis system in R^2 : The attractive dominant case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 107354 ~ 107354
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aml.2021.107354	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Nagai Toshitaka, Seki Yukihiro, Yamada Tetsuya	4. 巻 62
2. 論文標題 Global existence of solutions to a parabolic attraction-repulsion chemotaxis system in R^2 : The attractive dominant case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis: Real World Applications	6. 最初と最後の頁 103357 ~ 103357
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nonrwa.2021.103357	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Mukai Asato, Seki Yukihiro	4. 巻 41
2. 論文標題 Refined construction of type II blow-up solutions for semilinear heat equations with Joseph-Lundgren supercritical nonlinearity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 4847 ~ 4885
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2021060	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Seki Yukihiro	4. 巻 268
2. 論文標題 Type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with Lepin exponent	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 853 ~ 900
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.08.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Biernat Pawel, Seki Yukihiro	4. 巻 33
2. 論文標題 Transition of blow-up mechanisms in k-equivariant harmonic map heat flow	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 2756 ~ 2796
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ab74f4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yukihiro Seki	4. 巻 275
2. 論文標題 Type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 3380-3456
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2018.05.008.	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Pawel Biernat, Yukihiro Seki	4. 巻 2
2. 論文標題 Type II blow-up mechanism in supercritical harmonic map heat flow	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 407-456
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnx122	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計25件 (うち招待講演 23件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 関行宏
2. 発表標題 球面に値をとる調和写像流に対する球対称 爆発解の分類に関する考察
3. 学会等名 彦根偏微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関行宏
2. 発表標題 球面に値をとる調和写像流に対する球対称 爆発解の分類に関する考察
3. 学会等名 Okayama Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関行宏
2. 発表標題 球面に値をとる調和写像流に対する球対称 爆発解の分類に関する考察
3. 学会等名 楕円型・放物型微分方程式研究集会 龍谷大学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 Description of non-self-similar singularities in harmonic map heat flow
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 藤田方程式に対する有限時間爆発とその分類について
3. 学会等名 「有限時間特異性」勉強会(第5回) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 調和写像流方程式に対する特異性解析
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (グループ型A) 「非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yukihiro Seki
2. 発表標題 Description of non-self-similar singularities in harmonic map heat flow
3. 学会等名 OCAMI, International Workshop on Geometric Evolution Equations and Related Fields (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 非線形放物型方程式に内在する非自己相似的特異性の描写
3. 学会等名 数学研究会特別 賞受賞講演会, (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yukihiro Seki
2. 発表標題 Transitions of blow-up mechanisms in S^2 -equivariant harmonic map heat flow
3. 学会等名 4th Swiss-Japanese PDE Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 藤田方程式における臨界指数と解の爆発構造
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 球面に値を取る調和写像流方程式の解の爆発について
3. 学会等名 解析学研究特別セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 球面に値を取る調和写像流方程式における爆発構造の遷移
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 On type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 Transitions of blow-up mechanisms in \mathbb{S}^k -equivariant harmonic map heat flow,
3. 学会等名 応用解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 球面に値を取る調和写像流方程式における爆発構造について
3. 学会等名 第45発展方程式研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yukihiro Seki
2. 発表標題 Construction of refined type II blow-up solutions of the Fujita equation and its applications
3. 学会等名 8th Euro-Japanese Workshop on Blow-up（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yukihiro Seki
2. 発表標題 On blow-up mechanisms in harmonic map heat flow
3. 学会等名 Ito-Workshop on Partial Differential Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yukihiro Seki
2. 発表標題 On type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with super-critical nonlinearity
3. 学会等名 PDE seminar at Wuhan institute of Physics and Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 Type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent and harmonic map heat flow
3. 学会等名 神戸大学解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 球面に値を取る調和写像流方程式の解の爆発について
3. 学会等名 なかもず解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 球面に値を取る調和写像流方程式の解の爆発について
3. 学会等名 京都大学NLPDE セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 On type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 信州大学偏微分方程式研究集会, (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 On type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 On blow-up mechanisms in harmonic map heat flow
3. 学会等名 RIMS 研究集会「反応拡散方程式-伝播現象と特異性の解析および諸科学への応用-」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関 行宏
2. 発表標題 On type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

受賞： 2020年度大阪市立大学数学研究会特別賞，令和3年2月 日本数学会函数方程式論分科会福原賞，令和3年12月

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Ito Workshop on Partial Differential Equations	開催年 2018年～2018年
----------------------------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------