様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2021
課題番号：１８Ｋ０３３７５

研究課題名（和文）二重非線形退化特異放物型作用素の正則性と幾何学的熱流の研究

研究課題名（英文）Regularity for doubly nonlinear degenerate and singular parabolic equations and a geometric flow

研究代表者

三沢　正史（Misawa, Masashi）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・教授

研究者番号：４０２４２６７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：ソボレフ不等式の最良定数を定める非線形固有値問題に対する熱流，pソボレフ流，について以下の成果を得た：(1) pソボレフ流を記述する二重非線形退化特異放物型方程式の弱解の先験的正則性評価，最大値原理， 非負初期零境界条件のもと正値性伝播評価を構成した．内部正値性によって，pソボレフ流の弱解とその空間一階導関数の内部領域における時空連続性を証明した．(2) pソボレフ流の非負有界初期値零境界値問題に対する正則解の時間大域存在．この構成のために新しい非線形スケーリング変換を開発した．弱解の正値性および正則性を証明するために，pソボレフ流に対する先験的正則性評価を応用した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
多孔媒質型方程式およびpラプラス方程式を含む二重非線形退化特異放物型方程式の弱解の構成と弱解の正値性および空間一階導関数の時空連続性を証明した．線形放物型方程式を含む非線形退化特異放物型に対する正則性理論に貢献できた．また，幾何学に現れる山辺問題の熱流の初期値零境界値問題に対して， 定義域および初期値についてより一般的な条件のもと，解析的な評価によって，正則解の大域存在を証明した．幾何学的発展方程式の解の構成および正則性に寄与した．

研究成果の概要（英文）：We study a doubly nonlinear degenerate and singular parabolic equation. We consider the so-called p-Sobolev flow, which contains the geometric flow named Yamabe flow in differential geometry. We proved the global existence of a regular solution for the Cauchy-zero Dirichlet problem of the p-Sobolev flow, under the condition that the initial-boundary datum is non-negative, bounded and belongs to the energy class. The regular solutions is the weak solution, satisfying the regularity that the solution itself and its gradient are continuous in time-space. We also a prior regularity estimates for a weak solution of the p-Sobolev flow. The key of the proof is the so-called expansion positivity of a weak solution to the doubly nonlinear degenerate and singular parabolic equation describing the p-Sobolev flow, based on some local energy estimates.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ソボレフ流　ソボレフ不等式　山辺問題とその熱流　二重非線形退化特異放物型方程式　正則性　正値性伝播

１．研究開始当初の背景

（１）m 次元領域上定義された実数値関数の一階導関数の p 乗積分(1 < p < m), p エネルギー, に対して以下のような条件付き極値問題を考える：Sobolev 指数 p^*乗積分, 体積, を定数とする制限条件のもと p エネルギーを極小化する. ここで, 指数 $p^* = mp/(m-p)$を Sobolev 指数とよぶ. Sobolev 不等式の最良定数はこの条件付き極値問題の下限値で与えられる. この条件付き極値問題は, p-Laplace 作用素に対する非線形固有値問題である. とくに, 対応する Euler Lagrange 方程式は, 体積保存条件による Lagrange 乗数, 非線形固有値とよぶ, を係数とする Sobolev 臨界指数乗非線形項を低階項とし p-Laplace 作用素を主要部とする非線形退化特異楕円型方程式である. ここで, $q = p^* - 1$ を Sobolev 臨界指数とよぶ. Sobolev 不等式の最良定数は, 関数の定義域が有界領域, 零 Dirichlet 境界条件のもとでは達成されず, 対応する Euler Lagrange 方程式の解は自明解のみである. 一方, 関数の定義域が全空間あるいはコンパクトリーマン多様体のときには, Euler Lagrange 方程式の正値解によって達成される.

（２）未解決問題　非線形固有値に対応する Lagrange 乗数は, 体積保存の制限条件のもと p エネルギーによって定まる. したがって, 一般に高 p エネルギーの固有値に対する固有関数が存在し得るが, これら存在については, 未解決のままである. そこで, 本研究では, 一般の高 p エネルギーの固有値に対する固有関数の存在を調べるために, 次の問題を研究する：
p-Sobolev 流の大域存在と正則性および体積集中現象：p-Sobolev 流の正値正則解の時間大域存在, 漸近挙動, とくに, 無限時間おける高 p エネルギーの固有関数への収束および体積集中現象. Sobolev 不等式の最良定数を達成する正値関数の存在非存在.

p-Sobolev 流, は, Sobolev 不等式の最良定数を定める条件付き極値問題に対する勾配流であり, 体積保存の制限条件のもと p エネルギーの最急降下曲線であるので, 解の時間無限大の極限関数は定常解, 極値問題の解, となることが予想される. とくに, 任意の初期値から出発する p-Sobolev 流は, エネルギー最小化関数以外の極小化関数に収束することが期待される.
p-Sobolev 流は, Sobolev 臨界指数乗非線形項を低階項とし, 時間微分項が解の Sobolev 臨界指数乗項の時間微分であり, 空間 2 階微分項が p-Laplace 作用素である二重非線形退化特異放物型 2 階偏微分方程式の解として定まる. 空間 2 階微分項を形式的に除いた方程式は, 指数型 ODE であり, 解を大域的に存在させる効果がある. 一方, 主要部の二重非線形退化特異放物型作用素は, 速い拡散型の porous medium 型作用素であり, 解を有限時間で消滅させる効果をもつ. これら 2 つの効果の拮抗によって正値有界な初期値に対する解は正値有界となり時間大域存在することが期待できる.

２．研究の目的

（１）**本研究の目的**　本研究では, p-Sobolev 流を含む二重非線形退化特異放物型方程式のクラスの新たな幾何学的変分的応用を見出すとともに, 二重非線形退化特異放物型用素に対する正則性評価の改良, 新たな正則性評価の開発を目的とする. 具体的には以下の問題の解決を目指す：

① **大きいデータに対する時間大域存在**：体積保存(体積 = 1)を満たす大きい p エネルギーの正値有界な初期値に対する p-Sobolev 流の正値正則解(解および空間一階導関数が時空連続である解)の時間大域存在

② **p-Sobolev 流の局所正則性評価**：初期値零境界値が p エネルギー有限でありかつ有界であるならば, p-Sobolev 流の弱解は有界となる. これは, 初期値零境界値の有界性と方程式に対する最大値の原理によって証明できる. また, 初期値零境界値が非負であり, 体積保存（体積=1）することによって解は正値となる. これは方程式に対する局所正値性伝播によって証明できる. 結果, 弱解は正値有界となって p-Laplace 型方程式を満たすことになり, 解および空間一階導関数の時空局連続性が得られる.

③ **体積集中現象と漸近挙動の解析**：p-Sobolev 流の解は体積保存し, あるエネルギー不等式を満たす.これによって, p-Sobolev 流の解は時間無限大において Euler-Lagrange 方程式の弱解（定常解）に収束することがわかる. 対応する定常解は, Sobolev 臨界指数冪乗非線形項を有する p-Laplace 方程式の有界領域上の弱解であるので自明解となる（恒等的に零の解）一方, 体積保存から解の体積は 1 である. したがって, 定常解は, 体積集中する有限個の点での Dirac のデルタ関数と零函数の和となることが予想される. p-Sobolev 流の漸近挙動は結局, 体積集中する点の個数と各体積集中点周りにおける漸近形によって決定される. 各体積集中点周りにおける漸近

形は，体積および p-エネルギーの測量のもと，全空間の正値定常解(Talenti の特殊解)によって特徴つけられる．

（２）**本研究の方針**　p = 2 の場合には，p-Sobolev 流はもともと，Yamabe 流(Hamilton 流)と呼ばれ，山辺問題と呼ばれるスカラー曲率の等角(共形)変形に関する幾何学的変分問題の勾配流として導入された．p ≠ 2 の場合には,エネルギー構造がある一方で，p = 2 の場合の Yamabe 流(Hamilton 流)とは異なり，スカラー曲率方程式に変形する幾何学的構造は期待できない．そこで，p-Sobolev 流方程式の主要部である二重非線形退化特異放物型作用素に対する先験的評価，とくに正則性評価を追及する必要がある．これまでに porous medium 作用素，時間発展 p-Laplace 作用素それぞれについて，有限伝播性,無限伝播性あるいは Harnack 型評価，解のヘルダー連続性が退化特異指数のある範囲において証明されている(P. Daskalopoulos ＆ K. Kenig, E. DiBenedetto ＆ U. Gianazza ＆ V. Vespri, E. DiBenedetto, J.L. Vázquez の教科書)．これら正則性評価を統合して，速い拡散の porous medium 作用素と時間発展 p-Laplace 作用素とが混合した**二重非線形退化特異放物型作用素の正則性評価**を精密に構築する．

p-Sobolev 流の解は体積保存することが要求される．主要部のみを有する二重非線形退化特異放物型方程式の解をある特別なスケーリング変換することによって体積保存する p-Sobolev 流の解を構成する．このスケーリング変換は p-Sobolev 流に特有の変換でありこれを見出すことが解の構成の最も本質的な部分である．
以上説明した方法は，p = 2 の場合 Yamabe 流に対する基本的結果の別証明を与える．

（３）**学術的特色，意義**　山辺問題は，コンパクトリーマン多様体のスカラー曲率(接空間の 2 次元部分空間上のガウス曲率の和)を等角(共形)変形するリーマン距離の存在を問う幾何学的問題としてよく知られている．この Yamabe 問題に対しては，R. Hamilton によって勾配流の方法(Yamabe 流，Hamilton 流と呼ぶ)が提案され，この勾配流がちょうど p = 2 の場合の p-Sobolev 流となる．Yamabe 流の方法はこれまでによく研究され，山辺問題の別証明を与えた(S. T. Yau, R. M. Schoen ら(1980 年代)の結果 ; R. Ye(1994), H.Schwetlick, M. Struwe(2003)および S. Brendle(2010)らの結果)．しかし，p = 2 の場合の Yamabe 流に対する数学解析は，Yamabe 流方程式がスカラー曲率発展方程式に同値変形される幾何学的構造を本質的に用いており，Yamabe 流が porous medium 作用素を含む非線形拡散方程式であることは利用していない．本研究では，porous medium 作用素を含む非線形拡散作用素の正則性評価を追及することによって，Yamabe 流方程式を含む広いクラスの二重非線形退化特異放物型方程式の解の大域存在，正則性を構築するとともに，二重非線形退化特異放物型作用素の幾何学的変分的応用を見出したい．(2) p-Sobolev 流に対応する定常解は，Sobolev 共役指数乗非線形項をもつ p-Laplace 方程式によって特徴つけられる．この Sobolev 臨界 p-Laplace 方程式については，p = 2 の場合には有名な B. Gidas, W.M. Ni, L. Nirenberg, L. Caffaereli, J. Spruck らの基本的結果 (1979, 動平面の方法 ; 1989, Kelvin 変換と比較原理)が知られている．この結果は p-Laplace 方程式へ一般化されている(G. Talenti(1976), L. Véron ら(1988), L. Damascelli, L. Montoro, S. Merchán, F. Pacella, M. Ramaswarmy ら(1999, 2001, 2014)の結果)．これら成果から得られた Talenti 型の特殊解は，p-Sobolev 流の時間無限大極限関数の体積および p エネルギー集中現象を特徴つけると予想される．一方，p-Sobolev 流の集中現象の数学解析のためには，p-Sobolev 流を記述する二重非線形退化特異放物型作用素に対する解析的評価，エネルギー不等式，比較原理，正値性伝播を保証する弱 Harnack 不等式，局所有界性評価 とくに局所有界性の局所体積による評価を精密に構築する必要がある．これら評価はまた，p-Sobolev 流型方程式の解の族のエネルギークラスにおける弱コンパクト性を導き，P. L. Lions の集中コンパクト性の二重非線形退化特異放物型作用素への一般化を与える．

３．研究の方法

（１）本研究計画では，上に述べた２－（１），①，②と③の問題の解決のために以下の手順で研究を進める ：

a．二重非線形退化特異放物型方程式に対する先験的評価：時間一階導関数の可積分性を保証するエネルギー不等式， 比較原理， 局所正値性の伝播(弱 Harnack の不等式)， 局所有界性評価(Harnack 型不等式)および有限時間消滅(解の存在時間の評価)を証明する．

b．p-Sobolev 流のとくに体積保存する解を導くスケーリング変換の発見．porous medium 作用素，時間発展 p-Laplace 作用素それぞれを不変にするスケーリング変換を参考にする．

c．主要部のみを有する二重非線形退化特異放物型方程式に対して b において見出したスケーリング変換を適用する． 主要部のみを有する二重非線形退化特異放物型方程式の解は有限時間でのみ正値であるが， a で証明したエネルギー不等式とスケーリング変換された解が体積保存することから， 最大存在時間において p エネルギー有限であることが保証される． これに基づいて， 初期値を逐次取り替えながら解を延長することによって， p-Sobolev 流の正値解の時間大

域存在を証明する．

（２） **正値性伝播の評価**　porous medium 作用素，時間発展 p-Laplace 作用素それぞれに対する正則性評価を統合する．二重非線形退化特異放物型作用素に対する最大値の原理および比較定理を証明する．二重非線形退化特異放物型作用素を不変にするスケーリング変換を見出し，このスケーリング変換のもと局所積分評価を実行する．局所弱 Harnack 不等式によって，解が正値である時間区間を初期値の正値性によって見積もる．一方，変数分離解との比較によって，解の有限時間消滅を証明する．実際，対応する ODE は有限時間消滅する関数であり，対応する p-Laplace 型退化特異楕円型方程式の解は全空間上の Talenti の正値解である．

（３）**スケーリング変換の導出**　p-Sobolev 流を導くスケーリング変換を見出す．エネルギー不等式にもとづいて，主要部のみを有する二重非線形退化特異放物型方程式の解を後退差分法によって構成する．エネルギー不等式，解の正値性評価および存在時間評価にもとづいて，スケーリング変換を適用して，p-Sobolev 流の正値解の時間大域存在を証明する．

４．研究成果

(1) p ソボレフ流に関連する，主要部のみをもつ二重非線形退化特異放物型方程式の初期値零境界値問題に対して，弱解が時間大域的に存在することを証明した．この弱解はエネルギ―不等式を満たす．とくに，弱解のべき乗時間弱微分は時空２乗積分可能であり，体積不等式が成り立つ．これら性質は，p ソボレフ流への応用において基本的である（5．主な発表論文[雑誌論文] 7 番目)．

(2) p ソボレフ流を記述する二重非線形退化特異放物型方程式の弱解に対する先験的正則性評価を構築した．有界な初期零境界条件のもと p ソボレフ流の弱解に対する最大値原理を証明した．非負初期零境界条件のもと p ソボレフ流の弱解の内部正値性を，早い拡散型の多孔媒質型 p ラプラス方程式に対する正値性伝播評価を構成することによって証明した． 弱解の内部正値性によって，弱解とその空間一階導関数が内部領域において時空連続であることを証明した．いずれも二重非線形方程式に対する新しい結果である(5．主な発表論文[雑誌論文] 6 番目)．

(3) p ソボレフ流に対する非負有界初期値零境界値問題に対して正則解が時間大域的に存在することを証明した．ここで，正則解とは，解とその空間一階導関数は時空連続である弱解のことである．p ソボレフ流の大域解を構成するために，p ソボレフ流に付随する非線形スケーリング変換を開発し，主要部のみをもつ二重非線形方程式の解にこのスケールリング変換を適用した．また，構成した弱解の正値性および正則性を証明するために，(1)で構築した p ソボレフ流に対する先験的正則性評価を応用している(5．主な発表論文[雑誌論文] 4 番目)．

(4) 時間発展 p ラプラス方程式を近似する Rothe 型後退差分方程式の弱解に対する正則性評価，とくに弱解の空間一階導関数の有界性評価を構成した．この評価は，近似変数に関して一様に成立する． この近似に関して一様に成立する評価を応用して，時間発展 p ラプラス方程式の変分的な初期値境界値問題に対して，空間一階導関数が時空有界である弱解が時間大域的に存在することを証明した．以上後退差分による近似方法は，二重非線形退化特異放物型方程式の弱解の構成に対しても応用できる(5．主な発表論文[雑誌論文] 3 番目)．

(5) 微分幾何学において現れる退化特異楕円型方程式系の弱解の幾何学的性質および正則性を証明した(5．主な発表論文[雑誌論文] 1,2,5 番目)

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計14件（うち査読付論文　13件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Masashi Misawa, Nobumitsu Nakauchi	４．巻 22, no. 1
２．論文標題 Two examples of harmonic maps into spheres	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Adv. Geom.	６．最初と最後の頁 23-31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/advgeom-2021-0008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Masashi Misawa, Nobumitsu Nakauchi	４．巻 2, no. 2, No. 19
２．論文標題 Regularity of the m-symphonic map	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Partial Differ. Equ. Appl.	６．最初と最後の頁 No. 19, 20-pges
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-021-00074-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kato, Nobuyuki; Misawa, Masashi; Yamaura, Yoshihiko	４．巻 (4) 200, no.3
２．論文標題 The discrete Morse flow method for parabolic p-Laplacian systems	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Ann. Mat. Pura Appl.	６．最初と最後の頁 1245-1275
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-020-01036-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kuusi, Tuomo; Misawa, Masashi; Nakamura, Kenta	４．巻 279
２．論文標題 Global existence for the p-Sobolev flow	５．発行年 2021年
３．雑誌名 J. Differential Equations	６．最初と最後の頁 245-281
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2021.01.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Masashi Misawa, Nobumitsu Nakauchi	4．巻 2:19
2．論文標題 Regularity of the m-symphonic map	5．発行年 2021年
3．雑誌名 SN Partial Differ. Equ. Appl.	6．最初と最後の頁 20 pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-021-00074-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Tuomo Kuusi, Masashi Misawa, Kenata Nakamura	4．巻 30, no. 2
2．論文標題 Regularity estmmates for the p-Sobolev flow	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Geometric Analysis	6．最初と最後の頁 1918-1964
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-019-00314-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 Kenta Nakamura, Masashi Misawa	4．巻 175
2．論文標題 Existence of a weak solution to the p-Sobolev flow	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Nonlinear Analysis	6．最初と最後の頁 157-175
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2018.05.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 三沢 正史
2．発表標題 pソボレフ流について
3．学会等名 茨城大学 解析セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 三沢 正史
2．発表標題 Regularity for the p-Sobolev flow
3．学会等名 第36回 九州における偏微分方程式研究集会（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 三沢 正史
2．発表標題 A doubly nonlinear degenerate singular parabolic equation and a nonlinear eigenvalue problem
3．学会等名 「関数空間の深化とその周辺」京都大学数理解析研究所，共同研究集会（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Masashi Misawa
2．発表標題 A doubly nonlinear parabolic type equation and the p-Sobolev flow
3．学会等名 2018 PDEs workshop in Hangzhou（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
RIMS workshop 「Geometric Aspects of Solutions to Partial Differential Equations	2019年～2019年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関