

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03377

研究課題名（和文）Kirchhoff方程式の大域解析

研究課題名（英文）Global analysis of the Kirchhoff equation

研究代表者

松山 登喜夫（Matsuyama, Tokio）

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：70249712

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：Kirchhoff方程式の解析には、時間に依存する係数をもつ2階線形双曲型偏微分方程式のエネルギー評価式が必要である。本研究ではこれまで得られた既存の結果を見直し係数のかかり方を正確に同定し非線形問題に適用可能な形にした。証明は係数に軟化子を作用させ係数の微分可能性を緩めて、結果としてGevrey空間でのエネルギー評価式を得た。本研究とは別に一般領域上でBesov空間を、スペクトル分解をとおして定義し古典的なBesov空間の緒性質が得られた。この結果の応用として、ヘルダー型の双線形評価式が得られた。この評価式は非線形偏微分方程式の基本的な道具である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Kirchhoff方程式は準線形双曲型偏微分方程式であり、その解析は非常に難しいことで知られている。1876年にG. Kirchhoffは彼の著書で1次元の弦の非線形振動を記述する方程式として提唱して以来、1940年S. Bernsteinにより時間大域的な実解析解を有界区間で存在することを証明し、それ以来、実解析的なクラスをGevrey空間やSobolev空間に広げようと国内外の多くの研究者が取り組んだにもかかわらず未だ満足のいく結果が得られていない。この問題は80年来の未解決問題である。この問題を解決することは学術的にも非常に重要な意義があると思われる。

研究成果の概要（英文）：The analysis of the Kirchhoff equation requires the energy estimates for linear hyperbolic equations with time-dependent coefficients. In this project we looked up the previous known results, and investigated the behaviour of the coefficients. Then we succeeded to make a convenient form. As an another project, we succeeded to define the Besov spaces on an open set via spectral analysis. As an application of this result, bilinear estimates on Besov spaces are obtained, which are a fundamental tool of the nonlinear partial differential equations.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：Kirchhoff 方程式 Gevrey 空間 Sobolev空間 波動方程式 時間大域解 Besov空間 双線形評価式

### 1. 研究開始当初の背景

Kirchhoff 方程式は、主要部の係数が未知関数の積分で与えられた時間変数のみに依存するいわゆる非局所性をもつ準線形双曲型偏微分方程式として知られ、国内外の多くの研究者により多大なる関心を寄せられているにもかかわらずその解析は非常に難しいことで知られている。1876年に G. Kirchhoff は彼の著書で 1 次元の弦の非線形振動を記述する方程式として提唱して以来、1940年 S. Bernstein により時間大域的な実解析解が有界区間上で存在することを証明し、その後一般次元の実解析解 Pohozaev により得られた。それ以来、実解析的なクラスを Sobolev 空間に広げようと国内外の多くの研究者が取り組んだにもかかわらず、Sobolev 空間に属する大きな初期値に対する時間大域解の存在が得られていない。それどころか、Gevrey 級解すら得られていないのが現状である。実解析のクラスと Sobolev 空間の中間的なクラスとして準解析的クラスが考えられるが、準解析的解に関しては幾つか結果がある。しかし上記の問題とはかなり隔たりがある。

一方、初期値が小さい場合幾つか重要な結果がある。多項式の重みが付いたノルムのサイズが小さい初期値を有する Cauchy 問題の場合、Greenberg-Hu, D'Ancona-Spagnolo らにより Sobolev 空間に属する解が時間大域的に存在することが示され、その後、山崎多恵子氏は彼らの結果を拡張したばかりではなく散乱問題まで解決した。さらに筆者と Ruzhansky 氏との共同研究により既存の結果をすべて包括する論文を発表し小さな初期値をもつ Cauchy 問題の時間大域的可解性に終止符を打つことができた。この論文では Kirchhoff 方程式を含む偏微分方程式系である Kirchhoff 方程式系を扱っており、asymptotic integration method と Shauder-Tychonoff の不動点定理を組み合わせて証明を遂行しており、方法論的にも斬新的であるとの評価が得られている。

最近筆者は時間を任意に与えたとき、初期値の Gevrey 解析性が時間に依存すればその時間まで解が存在するという semiglobal solution の存在を証明した。しかし、この結果は未解決問題には到達していないが、Gevrey 可解性に関し小さな前進を与えた結果であることを特筆したい。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、初期値が Gevrey 空間と Sobolev 空間に属している Kirchhoff 方程式の時間大域解の存在を証明することである。Kirchhoff 方程式はハミルトン構造を持っており一見、波動方程式とはほぼ同様に扱えるかに見える。しかし主要部についている非局所項の時間微分の評価が問題の鍵である。この非局所項はとてつもなく激しく振動をしており、この振動を制圧する方法を見出すことが肝要である。実解析的解を考える分には適当なエネルギー不等式を求めることによりこの振動を制御でき、結果として時間大域解が得られる。Kirchhoff 方程式の Gevrey 級解の存在の証明は、準解析的クラスの解を求める既存の方法では不可能であると考えられ間違いなく何か新しいアイデアが必要である。小さな初期値の場合、筆者らが考案した振動積分で定義されるクラスで処理できる。このクラスは、高階のエネルギーを有界にさせる効果をもたらす。しかし初期値が大きい場合は全く別の方法を考案しなければならない。問題の難しさはここにある。

Kirchhoff 方程式の局所解の存在と lifespan の下からの評価式はよく知られているが、lifespan の上からの評価式は得られていない。この評価が得られれば目的を達成することができる。この種の評価式を証明するのは非常に難しいが、本研究では lifespan の Sobolev 空間での位相的性質などを詳細に調べることでより解の爆発問題にアプローチすることを当面の目標とし、そのうち最終目標である時間大域解の存在の証明に取り掛かることである。

### 3. 研究の方法

本研究を遂行するためには、Kirchhoff 方程式の解の lifespan の構造の解明し、特にそのノルムの連続依存性や位相的性質を解明することである。上記の結果を用いて、Gevrey クラスに属する大きな初期値をもつ Kirchhoff 方程式の Cauchy 問題に対する時間大域解の存在を証明する。さらに本研究は外部問題にも適用可能であることを示す。このような方法を実現するには係数が時間に依存する 2 階線形双曲型偏微分方程式のエネルギー評価式を得ることが肝要である。その際、係数はリプシッツ連続であるとして証明する。これより高い微分可能性を課しても Kirchhoff 方程式に見合う最良の評価が得られないからである。重要な仮定として係数の微分が端点で強い特異性を課すことである。これは Kirchhoff 方程式の時間局所解の lifespan における挙動に合わせるためである。

#### 4 . 研究成果

Kirchhoff 方程式の解析には,時間に依存する係数をもつ2階線形双曲型偏微分方程式のエネルギー評価式が必要である.本研究ではこれまで得られた既存の結果を見直し係数のかかり方を正確に同定し非線形問題に適用可能な形にした.現在級数論の基礎的な事実に注目し非局所項の時間微分の爆発速度を同定することを検討している.

本研究とは別にスペクトル理論をとうして一般領域上の Besov 空間の厳密な定義を与え、さらにヘルダー型の評価式である双線形評価式を得たことももう一つの成果としてあげたい.これらの結果は一般領域上の偏微分方程式の解の存在や時空評価式を得るのに基本的な道具となり,多くの研究者が引用し活用している.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama and K. Taniguchi	4. 巻 494
2. 論文標題 Bilinear estimates in Besov spaces generated by the Dirichlet Laplacian	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2020.124640	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 V. Georgiev and T. Matsuyama	4. 巻 2172
2. 論文標題 Low frequency resolvent estimates for Dirichlet Laplacian on exterior domains	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 AIP Conference Proceedings	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5133501	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Matsuyama and M. Ruzhansky	4. 巻 137
2. 論文標題 On the Gevrey well-posedness of the Kirchhoff equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Anal. Math.	6. 最初と最後の頁 449-468
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11854-019-0017-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama and K. Taniguchi	4. 巻 152
2. 論文標題 Besov spaces on open sets	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bull. Sci. Math.	6. 最初と最後の頁 93-149
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.bulsci.2019.01.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Iwabuchi, T. Matsuyama and K. Taniguchi	4. 巻 34
2. 論文標題 Boundedness of spectral multipliers for Schrödinger operators on open sets	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Rev. Mat. Iberoam.	6. 最初と最後の頁 1277-1322
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/rmi/1024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計10件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Tokio Matsuyama
2. 発表標題 Long time existence of the Kirchhoff equation
3. 学会等名 Dispersive and subelliptic PDEs, Centro di Ricerca Matematica, Ennio De Giorgi, Scuola Normale Superiore di Pisa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tokio Matsuyama
2. 発表標題 Analytic well-posedness for wave equation with time-dependent coefficient, with application to the Kirchhoff equation
3. 学会等名 Seminaires Equations aux Derivees Partielles, Universite; de Franche-Comte, Laboratoire Mathematique de Besancon (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tokio Matsuyama
2. 発表標題 Analytic well-posedness for wave equation with time-dependent coefficient, with application to the Kirchhoff equation
3. 学会等名 Cardiff Analysis Seminar, School of Mathematics, Cardiff University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tokio Matsuyama
2. 発表標題 Low frequency resolvent estimates for Dirichlet Laplacian on exterior domains
3. 学会等名 INDAM Workshop, Anomalies in Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tokio Matsuyama
2. 発表標題 Energy estimate for wave equation with bounded time-dependent coefficient
3. 学会等名 12th International ISAAC Conference, University of Aveiro
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tokio Matsuyama
2. 発表標題 Low frequency resolvent estimates for Dirichlet Laplacian on exterior domains
3. 学会等名 45th International Conference, Applications of Mathematics in Engineering and Economics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松山 登喜夫
2. 発表標題 Kirchhoff方程式のCauchy問題の可解性について
3. 学会等名 岐阜数理科学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松山 登喜夫
2. 発表標題 Kirchhoff方程式のCauchy問題の可解性について
3. 学会等名 神楽坂解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Matsuyama
2. 発表標題 On the Gevrey well-posedness of the Kirchhoff equation
3. 学会等名 MicroLocal and Time Frequency Analysis 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Matsuyama
2. 発表標題 On the Gevrey well-posedness of the Kirchhoff equation
3. 学会等名 International Conference on Generalized Functions GF2018, Dedicated to Professor Michael Oberguggenberger's 65th birthday （招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 International Conference on Generalized Functions GF2018, Dedicated to Professor Michael Oberguggenberger's 65th birthday	開催年 2018年～2018年
---	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------