

令和 4 年 5 月 31 日現在

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03383

研究課題名(和文)非局所的相互作用による定在波の安定化効果に関連する最小化変分問題の研究

研究課題名(英文)Research on minimization problem related with stabilizing effect for standing waves caused by non-local interaction

研究代表者

渡辺 達也 (Watanabe, Tatsuya)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：60549749

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、非局所的相互作用による定在波の安定化効果に関連する最小化変分問題を考察した。特にある極限方程式として得られる準線形シュレディンガー方程式の定常問題の解構造(一意性・多重性・漸近的プロファイルなど)を解析した。本研究の成果の1つは、エネルギー最小解の一意性と非退化性をすべてのパラメータ領域で示したことである。さらに、非線形項がソボレフ臨界指数の場合の解の漸近挙動を考察して、解の漸近挙動のパラメータに関する依存性が非線形項の指数によってどのように変化するかを完全に解明した。

また、シュレディンガー・マクスウェル方程式の定在波の安定性や他の物理モデルの研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、定在波の安定化効果が非局所的相互作用によって得られるということを、付随する最小化問題のラグランジュ乗数の解析から捉えることを目標としている。定在波は様々な数理モデルで現れ、その安定性解析は重要な研究課題の一つであるが、厳密な解析が行われていない数理モデルは数多く残されている。本研究結果で得られた結果や手法は他の方程式に対する最小化変分問題にも応用できる。様々な物理モデルにおける定在波の安定性解析の研究にも大きな寄与があり、物理学者による(形式的な)考察を数学的に厳密化でき、応用面でも大きな意義がある。

研究成果の概要(英文)：In this research, I have investigated minimization problems related with the stabilizing effect for standing waves caused by non-local interactions. Especially, I have studied the solution structure (uniqueness, multiplicity and asymptotic profile) of the stationary problem of a quasilinear Schrödinger equation which is derived as a limit equation. One of the main results of my research is to show the uniqueness and the non-degeneracy of ground state solutions for a whole range of parameters. Moreover, I have studied the asymptotic behavior of solutions when the nonlinear term has the Sobolev critical growth. My result completely reveals how the parameter dependence of the asymptotic profiles of solutions changes with respect to the nonlinear exponent.

I have also performed the stability analysis of standing waves for the Schrödinger-Maxwell system, and investigated several other physical models.

研究分野：微分方程式と変分問題

キーワード：楕円型微分方程式 変分問題 定在波 安定性解析

1. 研究開始当初の背景

本研究の目的は、最小化変分問題のラグランジュ乗数の解析を通じて、定在波の安定化効果を理論的に解明することである。

非線形シュレディンガー方程式における定在波の安定性については、数多くの研究がある。特に、空間2次元・3次元において、3次の非線形項に対する定在波は不安定であることが知られている。非線形光学やプラズマ物理では、3次の非線形項が最も基本的な非線形性である。そこで、定在波を安定化させるような補正をモデル方程式に行う必要がある。そのような試みは古くから行われているが、本研究では非局所的相互作用による安定化に着目する。物理学者のBangらは非局所シュレディンガー方程式において解の爆発が起こらないことを示した。さらに weakly nonlocal response と呼ばれる、波動関数の幅に比べて非局所項の幅が狭い場合を考察して、数値計算によって定在波が安定であることを示した。この結果により、非線形項の非局所性が定在波を安定化させることが示唆される。この場合の方程式はプラズマポリマーコーティングに応用される準線形シュレディンガー方程式としても知られ、物理学者のBrizhikらは定在波が安定であることを形式的計算により示した。しかし、これらの安定性の結果は数値計算によるものであり、数学的厳密化が課題となっている。

これまでは、プラズマポリマーコーティングに応用される準線形シュレディンガー方程式の研究を行ってきた。特に、モデルを導出した物理学者が提唱した“定在波の安定化効果”に興味を持ち、これを数学的に解明することを目標にしてきた。この問題を完全に解決するには至っていないが、非局所的相互作用を持つシュレディンガー方程式においてある近似を行うことで、これまで研究した準線形方程式が得られることを知った。近似する前の非局所的シュレディンガー方程式でも定在波の安定化効果が提唱されており、本研究の進展によって定在波の安定化効果を広い枠組みで保証出来るのではないかと考えた。

2. 研究の目的

本研究では、非局所的シュレディンガー方程式の定在波の安定性を考察する。Cazenave-Lionsの理論により、定在波の安定性は付随する制限付き最小化変分問題の最小点の存在の一意性によって特徴付けられることが知られている。特に、対応するラグランジュ乗数の単射性が示されれば、定在波の安定性が示される。よって、非局所相互作用のラグランジュ乗数に対する影響を解析すれば、定在波の安定化が解明される。特に、方程式に含まれるパラメータに関して、ラグランジュ乗数がどのように依存するかが分かれば、本研究の目的である定在波の安定化効果が数学的に厳密化できたことになる。考える方程式が斉次性を持たないので、スケージングの議論ではラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解明できないことが、この問題の困難な点である。

そこで、手がかりとなるのが weakly nonlocal limit として得られる準線形方程式である。これまで行ってきたエネルギー最小解の一意性と非退化性についての結果を利用した漸近解析によって、元の方程式に対するラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析することを試みる。同時に、斉次性を持たない制限付き変分問題におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性に対する解析手法を確立し、様々な物理モデルにおける定在波の安定性解析への応用を試みる。

具体的な目的は以下の通りである。

- (1) 準線形シュレディンガー方程式におけるエネルギー最小解の一意性・非退化性・漸近挙動の分類を完成させること
- (2) 様々な物理モデルに付随する制限付き変分問題におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析すること

3. 研究の方法

(1) 準線形シュレディンガー方程式におけるエネルギー最小解の研究

この研究ではエネルギー最小解の一意性・非退化性および漸近挙動に対する非線形項の指数・パラメータによる分類を行う。具体的には、これまでの研究で残されていた非線形項がソボレフ臨界指数の場合の漸近挙動の解析と、パラメータの値によらない一意性・非退化性を考察する。前者については、これまで行ってきた爆発解析による一様有界性を用いた、スケージングの議論による詳細な漸近的プロファイルの解析を行えばよい。後者については、対応する常微分方程式の解構造を詳細に調べればよい。

(2) 様々な制限付き変分問題におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性の研究

この研究では、様々な物理モデルにおけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を考察する。具体的には、以下のような方程式を考える。

- ・シュレディンガー・マックスウェル方程式
- ・ボルン・インフェルトの非線形電磁気学における非線形ライン・ゴールドン方程式

これらの物理モデルは近年盛んに研究されているが、そのどれもが斉次性を持たない方程式である。これらの方程式における定在波の安定性を解析することも目的の一つだが、いずれかの問題でラグランジュ乗数のパラメータ依存性が確立出来れば、その手法は他の問題に対しても応用できると期待される。特にシュレディンガー・マックスウェル方程式においては、非線形項が特別な場合に、付随する最小化問題の最小点の一意性が得られており、それをを用いることでラグランジュ乗数の単射性が示されている。この結果の証明は方程式が持つ斉次性に強く依存しているが、陰関数定理等を用いることで一般の場合に拡張できると考えられる。

4. 研究成果

(1) 準線形シュレディンガー方程式におけるエネルギー最小解の研究

本研究は静岡大学の足達慎二氏・名城大学の柴田将敬氏と共同で行った。この研究に関する成果は大きく分けると2種類ある。

エネルギー最小解の一意性・非退化性に関する結果

これまで得られていた一意性・非退化性の結果ではパラメータに制限が必要であったが、この制限を完全に取り除くことが出来た。この結果によって、エネルギー最小解が存在する非線形項の指数の範囲・パラメータの範囲全体で一意性と非退化性が成り立つことが分かり、本研究の最終目的に大きく前進した。

この研究結果の大きなポイントは、準線形方程式を半線形方程式に変換する「双対変分構造」を与える写像の性質である。変換後の半線形方程式に対して、既存の一意性・非退化性の結果を適用することが基本的なアイデアであるが、そのためには変換を与える写像の性質を詳しく知る必要がある。特に、その写像が満たすある不等式を用いるのだが、これまでの研究で知られていた不等式を改良したことにより、既存のパラメータの制限を完全に外すことができた。

また、非退化性に関しては、既存の結果だけでは十分ではなかったため、半線形楕円型微分方程式における正值解の一意性の証明に立ち戻ることにした。その結果、既存の結果を大きく改良することが出来た。特に、この結果は非線形項が劣線形の場合にも適用できるものであり、近年盛んに研究が行われている2重べきの非線形シュレディンガー方程式にも応用されることから、当該研究成果は非常に評価されている。

エネルギー最小解の漸近挙動に関する結果

この研究では、エネルギー最小解のパラメータをゼロに近づけた場合の漸近挙動を考察した。その挙動は非線形項の指数がソボレフ臨界指数を超えるかどうかで大きく変わり、以前は臨界指数よりも小さい場合と大きい場合の結果を得ていた。

本研究で考察したのは、非線形項の指数が臨界指数と等しい場合である。この場合は、極限方程式がスケール不変性を持つため、漸近展開を1次の項まで調べるだけでは、極限の一意性が全く保証されない。しかし、漸近展開の2次の項を係数まで含めて精密に評価することにより、エネルギー最小解の詳しい漸近挙動を得ることが出来た。一連の結果により、エネルギー最小解の漸近挙動の分類が完成し、準線形項が漸近挙動にどのように影響するかが解明された。特に、空間3次元の場合はテスト関数の構成を変えることで、必要となる漸近評価を引き出すことに成功した。ソボレフ臨界指数を持つ非線形楕円型微分方程式の研究は数多くあり、空間3次元の場合だけ余分な条件が課されることや、得られる結果が悪いことが起こるが、本研究で用いたテスト関数の構成を用いることで、既存の結果を改良できるのではないかと考えている。

本研究の目標だった、準線形方程式におけるエネルギー最小解の一意性・非退化性・漸近挙動の分類は達成されたが、ラグランジュ乗数の解析の方は完全な解決には至らなかった。特に、準線形項による定在波の安定化を解決するには、本研究で得られたエネルギー最小解の一意性・非退化性・漸近挙動だけでは不十分であったため、現在はラグランジュ乗数法の証明に立ち戻ることや、他の問題におけるラグランジュ乗数の解析などを勉強中である。また、Cazenave-Lionsの方法とは別の手法による安定性解析の結果を適用し、本研究成果と合わせることで準線形項による定在波の安定化問題を解決出来ないかと考えている。

(2) シュレディンガー・マックスウェル方程式における定在波の研究

本研究は、フランスのボルドー大学のMathieu Colin氏と共同で行った。この研究に関する成果は大きく分けると2種類ある。

初期値問題の可解性に関する研究

この研究では、シュレディンガー・マックスウェル方程式における初期値問題の可解性を考察した。方程式を双曲型微分方程式系に変換して、エネルギー法によって局所解の一意存在を得た。この方法では初期値に高い微分可能性を課す必要があり、エネルギーが定まる関数のクラスでは解の局所存在が分かっていない。これを解決することが、今後の大きな課題の1つである。

定在波解の安定性の研究

この研究では、シュレディンガー・マックスウェル方程式における定在波の安定性を考察する。シュレディンガー・マックスウェル方程式は、マックスウェル磁場と相互作用する粒子の運動を記述する方程式であり、ゲージ理論において現れる重要な微分方程式として知られる。これらの方程式において、定在波解の安定性が磁場との相互作用によってどのように変化するかに興味がある。

これまでの結果により、付随する制限付き最小化問題の可解性や対応するラグランジュ乗数のパラメータ依存性が得られている。特に非線形項の指数が特別な場合は、最小点集合の一意性および、その応用として定在波解の安定性を示すことが出来た。この研究成果は大きく評価され、掲載された学術雑誌の Highlight collection に選出された。また、方程式が持つゲージ不変性を完全に取り込んだ安定性の結果を得た。ポイントとなったのが、定常磁場を組み込んだ新しい定常問題の可解性を考察したことである。

本研究は進展中であり、現在も Mathieu Colin 氏と共同研究を行っている。この研究で用いる手法は、他の物理モデルの多くにも適用可能であることが期待出来る。特にラグランジュ乗数の解析手法を確立出来れば、準線形シュレディンガー方程式や他の非局所的な方程式の研究でも進展が得られると考えている。非線形項の指数が小さい場合の最小化問題の完全な可解性は、現在でも未解決な問題であり、プロファイル分解を用いた最小化列の詳しい解析に取り組んでいる。また、対応する 2 次元の問題の研究を進めている。

(3) その他の研究

当初の予定にはなかったが、以下の研究に関する成果も得られた。

ボルン・インフェルト型準線形楕円型微分方程式の研究

この研究は、イタリアのバーリ工科大学の Alessio Pomponio 氏と共同で行った。本研究では、電磁気学に現れるボルン・インフェルト方程式の定常問題を考察する。その方程式は微分項に特異性があり、解を得ることは容易でない。そこで、方程式を近似する準線形方程式を考察し、解の存在を変分的手法で解析した。

チャーン・サイモンズゲージ場と相互作用した準線形シュレディンガー方程式の研究

この研究は、イタリアのバーリ工科大学の Alessio Pomponio 氏・Pietro D'Avenia 氏と共同で行った。本研究では、(1)で考察した準線形シュレディンガー方程式とチャーン・サイモンズゲージ場を相互作用させた方程式を考察した。(2)の研究と同様に、ゲージ場と相互作用したシュレディンガー方程式における定在波解の安定性に興味があるが、空間 2 次元の場合を考察する手がかりとして、本研究を行った。現時点では、一部のパラメータ範囲における解の存在のみが得られており、詳しい解析は今後の課題として残されている。

非線形光学に現れる準線形方程式の研究

この研究は、イタリアのバーリ工科大学の Alessio Pomponio 氏と共同で行った。非線形光学に現れる準線形楕円型微分方程式において、弱解の存在およびエネルギー最小解の存在を考察した。単調作用素の理論や新たな臨界点理論を用いることで、半線形方程式におけるエネルギー最小解の存在結果を準線形方程式の場合に拡張することが出来た。

以上のように、海外の共同研究者と様々な新規研究を開始した。これらの研究においても、未解決な問題は多くあり、今後の国際的な共同研究を進展させる良い機会が得られた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Alessio Pomponio and Tatsuya Watanabe	4. 巻 28
2. 論文標題 Ground state solutions for quasilinear scalar field equations arising in nonlinear optics	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications Research	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-021-00687-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shinji Adachi, Masataka Shibata and Tatsuya Watanabe	4. 巻 -
2. 論文標題 Uniqueness of asymptotic limit of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equation with H^1 -critical growth in R^3	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00036811.2020.1757079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Mathieu Colin and Tatsuya Watanabe	4. 巻 3
2. 論文標題 Cauchy problem for the nonlinear Schrodinger equation coupled with the Maxwell equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Henri Lebesgue	6. 最初と最後の頁 67-85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/ahl.27	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Pietro D'Avenia, Alessio Pomponio and Tatsuya Watanabe	4. 巻 150
2. 論文標題 Standing waves of modified Schrodinger equations coupled with the Chern-Simons gauge theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings A of the Royal Society of Edinburgh	6. 最初と最後の頁 1915-1936
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/prm.2019.9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Colin Mathieu, Watanabe Tatsuya	4. 巻 32
2. 論文標題 A refined stability result for standing waves of the Schrodinger-Maxwell system	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 3695 ~ 3714
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ab248c	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Adachi Shinji, Shibata Masataka, Watanabe Tatsuya	4. 巻 58
2. 論文標題 Asymptotic property of ground states for a class of quasilinear Schrodinger equation with H^1 -critical growth	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-019-1527-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mathieu Colin and Tatsuya Watanabe	4. 巻 61
2. 論文標題 On the existence of ground states for a nonlinear Klein-Gordon-Maxwell type system	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1619/fesi.61.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shinji Adachi, Masataka Shibata and Tatsuya Watanabe	4. 巻 38B
2. 論文標題 A note on the uniqueness and the non-degeneracy of positive radial solutions for semilinear elliptic problems and its application	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Scientia	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/S0252-9602(18)30803-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Alessio Pomponio and Tatsuya Watanabe	4. 巻 67
2. 論文標題 Some quasilinear elliptic equations involving multiple p-Laplacians	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 2199-2224
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1512/iumj.2018.67.7523	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Tatsuya Watanabe
2. 発表標題 Ground state solutions for quasilinear scalar field equations arising in nonlinear optics
3. 学会等名 NSFC-JSPS Mini-workshop on Nonlinear Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 渡辺達也
2. 発表標題 Ground state solutions for quasilinear scalar field equations arising in nonlinear optics
3. 学会等名 日本数学会 2020年 秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tatsuya Watanabe
2. 発表標題 Convex properties of positive solutions for a class of quasi-linear elliptic problems and the associated new minimization problem
3. 学会等名 Variational analysis on critical problems of nonlinear partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tatsuya Watanabe
2. 発表標題 On the stability of standing waves for the Maxwell-Schrodinger system and the associated minimization problem coupled with the Maxwell equation
3. 学会等名 ICIAM 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡辺達也
2. 発表標題 A refined stability of standing waves for the Schrodinger-Maxwell system and the associated new minimization problem
3. 学会等名 反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tatsuya Watanabe
2. 発表標題 Stability issues for the nonlinear Schrodinger equation coupled with the Maxwell equation
3. 学会等名 12th AIMS conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	足達 慎二 (Adachi Shinji) (40339685)	静岡大学・工学研究科・教授 (13801)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	パリ工科大学			
フランス	ボルドー大学			