

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 13 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03384

研究課題名(和文)シュレディンガー方程式の準古典解析

研究課題名(英文) Semiclassical Analysis of Schroedinger equations

研究代表者

藤家 雪朗 (Fujiie, Setsuro)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：00238536

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：行列値シュレディンガー作用素の量子共鳴の半古典極限における漸近分布についての研究を行った。対応する古典軌道が、一方は周期軌道、他方は非捕捉的とし、両者が交差する場合を考える。前者が生成する固有値が、後者との相互作用によって量子共鳴へと変化する(フェルミの黄金則)。この量子共鳴の漸近分布を、古典軌道の幾何、特に交差の接触次数を用いて記述することに成功した。その鍵となるのは、交差点における超局所的な解の漸近的振る舞いを記述する接続公式を計算することである。その計算は、本質的に(退化した)停留位相法へと帰着される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

二つの古典軌道が横断的に交差する場合の接続公式は、作用素の標準形に帰着させることによって計算することができる。これは特に新しい発想ではなく、A.Martinez、T.Watanabeとの共同研究でも利用した方法である。しかし、交差が退化して、接触している場合には、標準形は知られておらず(あるいは存在せず)、全く別の発想で接続公式を計算する必要があった。我々が採用した方法、すなわち厳密解を構成してそれらの間のWronskianを計算する方法は、新しい発想に基づくもので、停留位相法に帰着されるという事実の発見は、この分野の研究に新しい知見をもたらすものである。

研究成果の概要(英文)：I studied with M.Assal and K.Higuchi the asymptotic distribution in the semiclassical limit of resonances for matrix valued Schroedinger operators. We consider the case where one of the corresponding classical trajectories is periodic and the other one is non-trapping and they cross each other. The eigenvalues created by the former periodic trajectory transform into quantum resonances by an interaction with the non-trapping one (Fermi's golden rule). We succeeded in describing the asymptotic distribution of these resonances in terms of the geometry of the classical trajectories, especially the contact order of the crossings. The point is the computation of the connection formula at a crossing point which describes the asymptotic behavior of the microlocal solutions. It is essentially reduced to a degenerate stationary phase method.

研究分野：数学

キーワード：行列シュレディンガー作用素 半古典解析 超局所解析 WKB法 量子共鳴の漸近分布

1. 研究開始当初の背景

シュレディンガー作用素の半古典理論は、量子物理学における1世紀にわたる歴史を持つ一方、1970年代数学における超局所解析の理論の誕生と相俟って、近年に至るまで著しい発展を遂げてきた。ただ、行列値のシュレディンガー作用素については、その物理的・化学的な重要性(Born-Oppenheimer 近似、断熱・非断熱近似の問題など)にもかかわらず、未だ十分な理解が得られているとは言い難い。その大きな理由の一つは、行列値ポテンシャル、あるいは行列値作用素の表象(シンボル)の固有値の重複度の変化(しばしばエネルギー交差と呼ばれる現象)によって、従来研究されてきたスカラーの作用素にはない困難が生じるからである。エネルギー交差がどのような物理的・化学的量子効果をもたらすのかという問題は、数学的にも重要な課題であるとともに、これまでにない研究方法の開発も必要とする。空間次元を1次元に限っても、先行研究は少なく、我々は1次元のモデルについて、徹底的な解析を行うべく共同研究を行なっている。

行列シュレディンガー作用素の共鳴の半古典極限における漸近分布の研究は、同課題の過去の研究(A.Martinez, T.Watanabeとの共同研究)においてすでに始めていた。ただしそこで扱ったのは、限定されたモデルのみで、特に2つのポテンシャルの交差は横断的であることを仮定していた。それは厳密解の構成において収束を証明するために煩雑・膨大な評価を実行する必要があり、そのために何度も交差を繰り返すような複雑なモデルを解析することが難しかったこと、また交差が横断的な場合以外、作用素をよく知られた標準形に帰着させて接続公式を求めるという、従来の方法を採用することができなかつたからである。

行列シュレディンガー作用素の研究は、ポテンシャルが交差しない場合については、先行する研究が比較的多い。このような場合には、本質的にスカラーのシュレディンガー作用素の問題に帰着されることが知られている。上記のような周期的な古典軌道と非捕捉的な古典軌道がある場合でも、両者が交差しなければ、共鳴の虚部は半古典パラメータに関して指数的に小さいことも知られている。ただしこの指数のオーダーを決定する問題は未解決である。我々の研究もこの問題の解決の糸口になることを期待している。

2. 研究の目的

研究の目的は、行列シュレディンガー作用素の共鳴の半古典極限における漸近分布、特にエネルギー交差がもたらす量子効果の研究を継続し、発展させることである。具体的には、1次元2次元エルミート行列値ポテンシャルを持つシュレディンガー作用素を考える。この行列値ポテンシャルは滑らかに対角化できるとする。従って初めから非対角成分は半古典パラメータに関して小さいと仮定して良い(ラブラシアンがあるため、ゼロであるとは仮定できない)。2つの固有ポテンシャルの一方は単井戸型、すなわち対応する古典軌道は周期的で、もう一方は対応する古典軌道が非捕捉的であるとする。この時周期的なポテンシャルをもつスカラーシュレディンガー作用素は固有値を生成するのに対し、非捕捉的な方は連続スペクトルを持つ。2つの系の相互作用を表すポテンシャルの非対角成分がゼロであれば、この行列値作用素のスペクトルは連続スペクトルとそれに埋蔵された固有値で構成されるが、相互作用の存在のために、一般に固有値は消失して、代わりに量子共鳴が複素平面に現れる(Fermiの黄金則)。この量子共鳴の虚部は、対応する共鳴状態の寿命の逆数を表しており、実軸に近い、すなわち寿命の長い共鳴は物理的に重要である。この共鳴の虚部が、2つの古典軌道の交差によってどのように変化するかを明らかにするのが、研究の目標である。特に今研究期間においては、上記の研究背景、特にA.Martinez, T.Watanabeとの共同研究において遭遇した困難を克服して、交差を任意複数回繰り返すような複雑なモデル、また交差も横断的とは限らず、任意有限次の退化を許して、より一般のエネルギー交差をもつ行列シュレディンガー作用素の量子共鳴の漸近分布を明らかにすることが目的であった。

量子共鳴の漸近分布を支配するのは、対応する古典力学系、特に捕捉軌道であることは容易に想像できる。従って捕捉軌道上の解析、すなわち超局所的な解の解析が重要であって、それ以外での解析がほぼ不要であることから、複雑な系に対する計算も大幅に簡潔化できるはずである。これを可能にするのが超局所解析である。まず第一の目的は、超局所解析の理論を用いて、大域的な量子共鳴の問題を、超局所的な問題へと帰着させることである。

捕捉軌道の中で量子共鳴の分布に最も大きな寄与を与えるのは、井戸型ポテンシャルが作る周期軌道である。しかしこの周期軌道は対応するスカラーシュレディンガー作用素が生成する固有値の漸近分布を決定するだけで、他方の非捕捉的な軌道の情報は含まない。すなわち共鳴の虚部の漸近的な振る舞いを決定するのは、双方の軌道を組み合わせることができる「一般化古典軌道」で

ある。「一般化古典軌道」とは、言い換えれば、2つの古典軌道を、交差点において一方からもう一方へ乗り換えることを許して定義される、拡張された古典軌道のことである。少なくとも一度は乗り換える一般化古典軌道の中で最も寄与の大きいものが共鳴の虚部を決定することが予想される。従って、交差点での「乗り換え」の確率、正確には確率振幅を知ることがこの研究のポイントである。

3. 研究の方法

複雑なモデルに対しても量子共鳴の漸近分布を解析するために、厳密解の構成は交差点での接続公式を求めるためだけに、その点の近傍のみで行い、後は超局所的な議論のみで共鳴の漸近分布を求める方法を採用した。それは本質的に J.-F. Bony, T. Ramond, M. Zerzeri と共同研究で開発した理論の援用である。遠方では外向的 (outgoing) であるという境界条件のもとで、捕捉された古典軌道の上でだけ超局所的な解を構成する。捕捉された古典軌道は交差点を頂点とするグラフの構造をもつ。このグラフは閉じた軌道を必ず持つため、古典軌道上の一点で構成した超局所解をグラフ上で接続し、グラフ全体での超局所解が存在するためには、ある両立条件が必要である。この両立条件が共鳴の量子化条件である。これはスカラーの単井戸型ポテンシャルを持つ一次元シュレディンガー作用素の場合によく知られた Bohr-Sommerfeld の量子化条件の一般化である。上記 Bony, Ramond, Zerzeri との共同研究で用いた議論は、こうして捕捉軌道上での超局所解の構成から得られた量子化条件が、実際の共鳴を半古典極限において近似していることを、背理法によって証明するものである。

接続公式の計算には、逆に Martinez, Watanabe との共同研究で開発した厳密解の構成法を活用し、位置空間の交差点の両側で定義された厳密解の間の Wronskian を計算することで、相空間上の交差点近傍での超局所解の構造を完全に決定することに成功した。厳密解の構成には、空間次元が1であるというモデルの特殊性を活用している。今後研究を多次元に発展させるためには、別な方法を採用する必要がある。

4. 研究成果

上記研究方法を採用することによって、過去の研究を大きく一般化して、接触交差も許す複雑な行列シュレディンガー作用素の共鳴の漸近分布を計算できるようになった。共鳴状態の寿命を記述すると言われる共鳴の虚部は、半古典パラメータの $(m+3)/(m+1)$ のオーダーである。ここで m は複数ある交差点の中で最も退化した交差の接触次数である。また、その係数も古典軌道の幾何学的量を使って具体的に書き下すことができた。もう少し詳しく述べると、交差点で古典軌道を取り替えることを許して定義される「一般化古典軌道」に対し、「確率振幅」と呼ぶ複素数を定義する。この時、共鳴の虚部の漸近展開初項の係数は、周期軌道上の一点から無限遠方に逃げていく全ての一般化古典軌道に対し、それらの確率振幅を足し合わせたものである。この結果は M. Assal と K. Higuchi との共著論文として投稿中である。

また、行列値シンボルを持つ擬微分作用素の理論についての専門書を、M. Dimassi (ボルドー大学) と共著で執筆中である。前半で超局所理論の基礎について解説したのち、後半では固有値、共鳴の半古典理論への応用について記述する。本研究の成果は、応用部分において重要な位置を占める。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Fujiie, S., Hatzizisis, N., Kamvissis, S.	4. 巻 360
2. 論文標題 Semiclassical WKB problem for the non-self-adjoint Dirac operator with an analytic rapidly oscillating potential	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 90 - 150
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2023.02.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Dimassi, M., Fujiie, S.	4. 巻 130 No.3-4
2. 論文標題 Spectral asymptotics for the Schroedinger operator with a non-decaying potential	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 335 - 365
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3233/ASY-211754	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Assal, M., Fujiie, S.	4. 巻 386
2. 論文標題 Eigenvalue splitting of polynomial order for a system of Schroedinger operators with energy-level crossing.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1519 - 1550
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Fujiie, S., Martinez, A., Watanabe, T.	4. 巻 280
2. 論文標題 Width of resonances above an energy-level crossing	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 108918-108918
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2020.108918	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujiie, S., Kamvissis, S.	4. 巻 61
2. 論文標題 Semiclassical WKB problem for the non-self-adjoint Dirac operator with analytic potential	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 011510-011510
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5099581	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujiie, S., Wittsten, J.	4. 巻 38
2. 論文標題 Quantization conditions of eigenvalues for semiclassical Zakharov-Shabat systems on the circle	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 3851-3873
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2018167	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bony, J.-F., Fujiie, S., Ramond, T., Zerzeri, M.	4. 巻 405
2. 論文標題 Resonances for homoclinic trapped sets	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Asterisque	6. 最初と最後の頁 1-314
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24033/ast.1055	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bony, J.-F., Fujiie, S., Ramond, T., Zerzeri, M.	4. 巻 9
2. 論文標題 Barrier top resonances for non globally analytic potentials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Spectral Theory	6. 最初と最後の頁 315-348
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JST/249	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 Some quantum effects by crossings of classical trajectories in matrix Schroedinger operators
3. 学会等名 愛媛大学解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 WKB and microlocal approach to various Bohr-Sommerfeld quantization rules
3. 学会等名 Geometric Structures and Differential Equations - Symmetry, Singularity and Quantization
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 Eigenvalues and resonances created by energy-level crossings
3. 学会等名 Schroedinger Operators and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 Double well problem for a system of Schroedinger operators
3. 学会等名 ハミルトン系とその周辺（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 Eigenvalue splitting for a system of Schroedinger operators
3. 学会等名 The 17TH Linear and Nonlinear Waves (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 Eigenvalue splitting for a system of Schroedinger operator with an energy-level crossing
3. 学会等名 Seminaire EDP et Physique mathematique (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 Methode BKW exacte appliquee a un operateur de Dirac non-auto-adjoint
3. 学会等名 Groupe de travail semi-classique (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Setsuro Fujiie
2. 発表標題 Resonances for a system of Schrodinger operators associated with a energy level crossing
3. 学会等名 International Conference Spectral Theory and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤家雪朗
2. 発表標題 Resonances for homoclinic strapped sets
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Quantum Resonances and Related Topics	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Himeji Conference on Partial Differential Equations	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Himeji Conference on Partial Differential Equations	開催年 2021年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	ボルドー大学	パリ11大学	パリ13大学	
ギリシャ	クレタ大学			
イタリア	ボローニャ大学			
チリ	Pontificia Universidad Catolica de Chile			
イタリア	Universita di Bologna			
スウェーデン	University of Boras			
ベトナム	VIASM			