

令和 5 年 5 月 4 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03390

研究課題名(和文) 平面上の幾何学的グラフの変形同値性とその周辺問題

研究課題名(英文) Equivalence of plane geometric graphs by transformations and their related topics

研究代表者

中本 敦浩 (Nakamoto, Atsuhiko)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：20314445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：平面上の点集合 S に対して、 S を頂点集合とし、各辺が直線分のグラフを考える。特に、 S の凸包が外領域の境界で、各有限面が四角形のもので S の幾何学的四角形分割という。簡単な条件を課せば、 P は四角形分割可能となるが、 S の2つの四角形分割がedge flipという局所変形で移り合うかどうかは未解決である。一方、 S の三角形分割に関する同様の問題はさまざまなことが知られている。

本研究では、点集合 S の幾何学的四角形分割に焦点をあて、それらが局所変形で互いに移り合うかという問題や、その周辺にあるさまざまな問題について考える。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上記の問題設定に対して、本研究では、平面の必ずしも凸でない多角形 P の内部に直線分を加えて得られる P の幾何学的四角形分割を考える。どんな P も幾何学的四角形分割を持つとは限らないが、私たちは P の螺旋度という概念を定義し、 P の四角形分割可能性を螺旋度を用いて記述した。一方、変形による同値性の結果は得られたが、最良とはならなかった。

これらの問題は、組合せ的な設定では簡単に解決できるものであるが、幾何学的な制約が問題を難しくする。このように、組合せ論と幾何学の間には興味深い問題が多く存在し、これらの問題がその一例となっている。これらの解決により、両分野が大きく発展することが期待される。

研究成果の概要(英文)：For a point set S on the plane, consider a graph with vertex set S each of whose edge is a straight segment. In particular, if the outer cycle coincides with the convex hull of S and each finite face is quadrilateral, then the graph is a geometric quadrangulation on S . It is easy to see that if S satisfies an obvious condition, S admits a geometric quadrangulation, but it is not known whether two geometric quadrangulations can be transformed into each other by a local operation called an edge flip. On the other hand, the same problem for triangulations are studied by many people and we can find many research on this problem.

In this research, focusing on geometric quadrangulations on a point set S , we consider whether they can be transformed into each other by the local operations, and various problems related to it.

研究分野：離散数学

キーワード：幾何学的グラフ 三角形分割 四角形分割 螺旋度 edge flip

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 平面三角形分割の対角変形.

各面が三角形の単純グラフを平面の三角形分割と呼ぶ. 1936年に, Wagner はどの2つの三角形分割も, 対角変形と呼ばれる変形を繰り返すことにより, 互いに移り合うことが証明された. この定理は, 位相幾何学的グラフ理論の文脈で, その後, Negami や私たちのグループを中心に, 他の閉曲面で同様の事実が成り立つかが研究されてきた.

(2) 平面の点集合 S の幾何学的三角形分割とそれらの変形同値性.

同様の問題を幾何学的に考えてみよう. 平面上の点集合 S を考え, 頂点集合 S で, 各辺が直線分となるグラフを S 上の幾何学的グラフという. 特に, 外領域の境界が S の凸包に一致し, すべての有限面が三角形であるものを S 上の幾何学的三角形分割という. S が適当な条件を満たせば, S は幾何学的三角形分割を持つことが容易にわかる. また, S のどの2つの幾何学的三角形分割も, 対角変形により, 互いに移り合うことが知られている. ただし, ここでは各辺が直線分でないといけないため, 上の組合せ的設定よりも, こちらの幾何学的設定の方が制約が強いことがわかる. また, この問題は, 平面を S のどの点に最も近いかによって, 分割して得られるポロノイ図の構成に密接に関わるものであり, コンビニエンスストアの出店計画であるとか, 地域の避難所の設定等の応用的研究もあり, 理論的かつ応用的に重要視されている.

(3) 組合せ的設定と幾何学的設定.

上の2つで類似の同様の結果が知られているわけであるが, 特筆すべきは, 組合せ的設定では, 頂点数 n の三角形分割どうしは $O(n)$ 回の変形で移り合うことが知られているが, 幾何学的設定では, n 点からなる点集合 S の三角形分割どうしは, $O(n^2)$ 回の変形で移り合うことが知られており, かつ, これが最良のオーダーである. つまり, 組合せ的設定と幾何学的設定を比較することにより, 変形の難しさや, その他の問題意識が生じ, 両分野の特性が理解され, それらの研究が同時に進行する面白さがある.

(4) 平面の点集合の四角形分割.

私たちは, 上述の平面の三角形分割の対角変形の研究を模倣し, 頂点数が等しい平面の四角形分割が, edge flip と呼ばれる同様の変形により, 互いに移り合うかを考察していた. そこでは, 各面が四角形であるという性質から, 閉路の長さの偶奇性に関する議論が必要となり, 興味深い議論が行われた. 特に, 球面以外の閉曲面では, 曲面の基本群の代数的構造が四角形分割の性質を規定し, 通常の場合の組合せ論の枠組みでは明らかにできないような面白い事実が明らかにできていた.

(5) 点集合 S の幾何学的四角形分割

幾何学的制約付きの平面の四角形分割についての研究は行われていなかったため, 平面の点集合の幾何学的四角形分割の研究を開始した.

「平面上の点集合 S 上の幾何学的四角形分割が存在するか」という問いからスタートすると, 「 S の凸包が偶数である」という自明な偶奇に関する必要条件が発生することがわかるが, それが十分条件になることも簡単である. ところが, S の2つの幾何学的四角形分割が, edge flip で互いに移り合うかという問題 (edge flip における変形同値性) については, 解決の糸口が見つかっていなかった.

また, S の頂点が k 色で色分けされているとき (k -彩色点集合という), 同色の頂点が隣接しないような幾何学的四角形分割の有無が, Urrutia を中心に研究されていた. 自明な必要条件として, 「凸包上に同色の頂点が並ばないこと」が必要であるが, その条件が十分でないことも簡単にわかる.

そこで, Urrutia たちは, シュタイナー点と呼ばれる補助的な点を S に加えて, S と追加されたシュタイナー点を頂点集合とする幾何学的四角形分割を考察した (ただし, シュタイナー点は, S の凸包の内部に追加されるものとし, どの色を持つとしてもよい.) そして, 与えられた n 点からなる2-彩色点集合が与えられたとき, その四角形分割の構成に追加すべきシュタイナー点の個数を n の関数で評価した. しかしながら, $k=3$ では, そのような結果は不成立であることが示されていた. 私たちは, $k=3$ のとき, 同様の事実が成り立ち, $k=3$ のとき, S の凸包の点彩色が満たすべき条件を特徴づけていた.

このように, 与えられた点集合 S についての幾何学的四角形分割の存在問題は興味深い結果を得られていたが, S の幾何学的四角形分割の変形同値性についての糸口は得られてなかった. そこで, 問題をどのように簡略化していくかについての検討が始まる.

2. 研究の目的

平面上に配置された n 角形 P を与えよう. そして,

「 P の内部を直線分を加えることにより, P を四角形にできるか」

という問題を考えることにした。このとき、偶奇性の議論により、「 n が偶数であること」が必要条件であることがすぐにわかり、常にこれを仮定するものとする。当然、 P が凸であれば、 P の内部は四角形に分割できることがわかり、このことは、この問題の組合せの設定では、問題は自明であることを意味する。また、この問題を P の幾何学的三角形分割について考えると、幾何学的三角形分割の存在に関しては、有名な美術館問題、すなわち、「 n 角形の美術館が平面に与えられたとき、必要な監視カメラの台数を n の関数で与えよ」という問題における重要な補題として与えられることがわかる。さらに、 P の幾何学的三角形分割の変形同値性に関して、同様に肯定的に解決されていた。

3. 研究の方法

「偶数 $n \geq 4$ に対して、平面上の n 角形 P に幾何学的四角形分割が存在するか」に対しては、ただちに反例があることがわかった。このあたりの問題の初期化に関しては、文献から情報収集を行い、さらに、Urrutia 氏が来日の際、彼との研究打ち合わせを行う機会を得て、本問題をいろいろな角度から眺め、多くの議論を行った。

4. 研究成果

「偶数 $n \geq 4$ に対して、平面上の n 角形 P に幾何学的四角形分割が存在するか」について、反例があることは確かめられていたが、どんな P が幾何学的四角形分割を持つかについての条件は考えられていなかった。そこで私たちは、 P の螺旋度という概念を以下のように定義した。

頂点数 n の多角形 $P = v_1v_2\dots v_n$ について、区間 $[v_i, \dots, v_j]$ において、すべての頂点の内角が 180 度を超えるとき、区間 $[v_i, \dots, v_j]$ を螺旋という。 P の螺旋の総数を P の螺旋度という。

(1) 多角形 P の螺旋度と幾何学的四角形分割

最初の結果として、 P の螺旋度が 1 以下であれば、偶多角形 P は四角形分割可能であることを証明した、一方、 P の螺旋度が 2 以上のとき、 P は必ずしも四角形分割を持たないことも示すことができたため、螺旋度が 1 以上という評価は最良である。

(2) 多角形 P の螺旋度と幾何学的四角形分割のためのシュタイナー点

平面上の点配置の幾何学的四角形分割の際に用いたシュタイナー点を、多角形の幾何学的四角形分割にも適用しようと考えた。この問題設定においては、先行研究を見つけることができた。 n 角形 P に対して、いくつかのシュタイナー点を追加すれば幾何学的四角形分割が得られるかについて、Rawaswami たちが n に関する評価を与えていた。

これに対して、私たちは、「螺旋度が k の n 角形の四角形分割のために、 $2k-2$ 個のシュタイナー点を追加すればよい」という定理を証明した。また、 $2k-2$ 個のシュタイナー点を必要とする螺旋度 k の多角形も見つけることができたため、この評価が最良であることもわかった。

なお、ここで見つけた例は、Rawaswami たちの結果の最良性を示す例にもなっており、私たちの研究は彼らの研究をも進展させることができた。

(3) 螺旋度 k の多角形の幾何学的四角形分割の edge flip

螺旋度 k の多角形の幾何学的四角形分割について、螺旋度 3 の多角形の幾何学的四角形分割の組で、edge flip で移り合わないものが存在するが、螺旋度 2 の多角形の幾何学的四角形分割が edge flip で移り合うかどうかについてはわからなかった。一方、螺旋度 1 の多角形の幾何学的四角形分割は edge flip で移り合うことがわかった。

(4) まとめと課題

私たちは、多角形 P に対して、螺旋度という新しい指標を導入することで、 P の幾何学的四角形分割可能性とそれらの変形同値性について、独自の理論を構築していった。これらの問題は最終解決に至っていないが、さらに研究は継続したいと考える。

一方、多角形の螺旋度という指標はまったく新しいものであり、多角形の性質に関する既存研究にも大いに適用可能であると考えられる。したがって、それらの問題に対して、いろいろな研究成果が得られる可能性がある。まずは情報収集から始め、これらの研究を継続したい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 A. Nakamoto and Y. Omizo	4. 巻 299
2. 論文標題 Y-equivalence and rhombic realization of projective-planar quadrangulations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 98, 112
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2021.04.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 F. Hidaka, N. Matsumoto and A. Nakamoto	4. 巻 37
2. 論文標題 Quadrangulations of a polygon with spirality	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs Combin.	6. 最初と最後の頁 1905, 1912
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02346-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 N. Matsumoto, A. Nakamoto and S. Negami20	4. 巻 283
2. 論文標題 Diagonal flips in plane graphs with triangular and quadrangular faces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 292, 305
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2020.01.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Y. Asayama, R. Matsukawa, N. Matsumoto and A. Nakamoto	4. 巻 36
2. 論文標題 N-flips in triangulations with two odd degree vertices	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs Combin. 36 (2020), 469--490	6. 最初と最後の頁 469, 490
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-019-02130-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Hamanaka, A. Nakamoto and Y. Suzuki	4. 巻 36
2. 論文標題 Rhombus tilings of an even-sided polygon and quadrangulations on the projective plane	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs Combin. 36 (2020), 561-571.	6. 最初と最後の頁 561, 571
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-020-02137-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Nakamoto, K. Noguchi and K. Ozeki	4. 巻 90
2. 論文標題 Spanning bipartite quadrangulations of even triangulations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 267, 287
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22400	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Nakamoto, K. Noguchi and K. Ozeki	4. 巻 33
2. 論文標題 Extension to 3-colorable triangulations on surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1390, 1414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/17M1135505	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Ozeki, A. Nakamoto and T. Nozawa	4. 巻 33
2. 論文標題 Book embedding of graphs on the projective plane	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1801--1836
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/16M1076174	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Kotrbčik, B Mohar, N. Matsumoto, A. Nakamoto, K. Noguchi, K. Ozeki and A. Vodopivec	4. 巻 87
2. 論文標題 Grunbaum coloring of Eulerian triangulations on surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Graph Theory	6. 最初と最後の頁 475--491
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Nakamoto, Y. Oda, T. Yamashita and M. Watanabe	4. 巻 341
2. 論文標題 A note on two geometric paths with few crossings for points labeled by integers in the plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 1109--1113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2017.10.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Matsumoto, A. Nakamoto, T. Yamaguchi	4. 巻 341
2. 論文標題 Generating even triangulations on the torus	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 2035 2048
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2018.04.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Asayama, N. Matsumoto and A. Nakamoto	4. 巻 34
2. 論文標題 Generating even triangulations on the Klein bottle	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Graphs Combin.	6. 最初と最後の頁 727--757
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-018-1909-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Asayama, Y. Kawasaki, S-J, Kim, A. Nakamoto, and K. Ozeki	4. 巻 341
2. 論文標題 3-dynamic coloring of planar triangulations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 2988--2994
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2018.07.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Atsuhiko Nakamoto
2. 発表標題 Spanning quadrangulations in even triangulations of the projective plane
3. 学会等名 8th European Congress of Mathematics (On-line) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Atsuhiko Nakamoto
2. 発表標題 Spanning quadrangulations in triangulations
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings (American Mathematical Society, On-line) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Atsuhiko Nakamoto
2. 発表標題 Flip distance of triangulations on surfaces
3. 学会等名 Workshop "Graph Theory for Combinatorial Reconfiguration" (On-line) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中本敦浩
2. 発表標題 閉曲面の三角形分割のFlip distanceについて
3. 学会等名 RIMS共同研究「グラフの局所構造の制限が与える不変量への影響」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中本敦浩
2. 発表標題 曲面上のグラフの彩色について
3. 学会等名 RIMS 共同研究「組合せ最適化セミナー」(オンライン)(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Atsuhiko Nakamoto
2. 発表標題 Vertex-face structures in quadrangulations on surfaces
3. 学会等名 The 9th Slovenian Conference on Graph Theory
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atsuhiko Nakamoto
2. 発表標題 Coloring triangulations, even triangulations and quadrangulations on surfaces
3. 学会等名 Cycle and Coloring 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atsuhiko Nakamoto
2. 発表標題 Geometric quadrangulations on the plane
3. 学会等名 The 2nd East Asia Workshop on Extremal and Structural Graph Theory (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中本敦浩
2. 発表標題 多角形の幾何学的四角形分割について
3. 学会等名 日本数学会応用数学科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhiko Nakamoto
2. 発表標題 Geometric quadrangulations of a polygon
3. 学会等名 Discrete Mathematics Days 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 中本敦浩, 小関健太	4. 発行年 2021年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 204
3. 書名 曲面上のグラフ理論	

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------