

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03393

研究課題名（和文）強制公理の応用と大きい連続体濃度

研究課題名（英文）Applications of forcing axioms and large continuum

研究代表者

依岡 輝幸 (Yorioka, Teruyuki)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：60432192

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）： マーカーの対称性条件をも付加した Aspero-Mota 反復強制法の応用例を与え、さらに反復強制法の長さが ω_2 よりも長いときは proper にならない例を与えた。

サイドコンディション法が組み込まれたいくつかの強制法は Y-proper であることを示した。それにより、Mapping Reflection Principle と Weak Club Guessing, mho は Chodounsky-Zapletal の Y-Proper Forcing Axiom から導かれることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

集合を形式化することで、その形式化で「ある定理を証明する」ことが定義され、それにより「ある定理はその形式化から証明できない」ことが定式化された。これにより、カントールの連続体仮説をはじめいくつかの数学命題は集合論の形式化から証明も反証もされないことが示されてきた。これは数学に対する見方について問題提起している。本研究はこの問題に一役買うことを目指している。

研究成果の概要（英文）： The author presented an application of Aspero-Mota iteration with symmetric markers, and gave an example of Aspero-Mota iteration with symmetric markers which may not be proper when the length of the iteration is longer than ω_2 .

The author showed that some forcing notions with side condition method satisfy Y-proper, and showed that Y-Proper Forcing Axiom due to Chodounsky-Zapletal implies Mapping reflection Principle, Weak Club Guessing, and mho .

研究分野：公理的集合論

キーワード：強制法理論 無限組合せ論

様式 C-19、F-19-1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Cohen は強制法という集合論のモデルを拡大する手法を編み出し、集合論の公理系 ZFC が無矛盾ならば連続体仮説の否定「 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ 」が ZFC と無矛盾であることを証明した。その後、強制法の著しい発展とともにいくつかの未解決問題が ZFC で決定不能であることが示されてきた。

ベールのカテゴリー定理「完備距離空間において、可算個の稠密開集合の共通部分は空でない」は関数解析学における多くの重要な定理の証明に用いられる。Martin-Solovay はベールのカテゴリー定理の「完備距離」と「可算」の条件を弱めた数学的命題である Martin's Axiom, MA_{\aleph_1} を見出し、 MA_{\aleph_1} が無矛盾であることを証明し、実数直線の特徴づけに関するスースリン仮説など、当時の未解決問題の肯定解および否定解を MA_{\aleph_1} から与えた。 MA_{\aleph_1} は「可算鎖条件 (ccc) を満たす半順序において、どんな \aleph_1 個の稠密部分集合に対してもそれらすべてと交わるフィルターが存在する」ことと同値になる。半順序の適用範囲によって様々な命題が考えられ、それらを総じて強制公理と呼ぶ。ベールのカテゴリー定理のように、強制公理から多くの重要な数学的命題を示すことができ、結果としてその数学的命題が無矛盾であることが示される。代表的な強制公理には、 $MM \Rightarrow PFA \Rightarrow fPFA \Rightarrow MA_{\aleph_1} \Rightarrow p > \aleph_1$ という関係があり、「 $p > \aleph_1$ ならば $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ 」が成り立つ。

ある強制公理を満たす強制拡大モデルを構成するために、考慮する半順序と \aleph_1 個の稠密部分集合に対してひとつのフィルターを付加する強制拡大を次々に繰り返す。しかし、強制拡大を単に繰り返して構成したモデルでは元のモデルでの \aleph_1 が可算順序数になってしまい、求める強制公理を満たす拡大モデルを構成できない。そこで、 \aleph_1 などの基数を保存したまま強制拡大を次々に繰り返すことができる反復強制法が開発された。ccc 半順序のフィルターを付加する強制拡大は基数を保存したままいくらかでも繰り返し行える反復法があるため、 2^{\aleph_0} をいくらかでも大きい値にする MA_{\aleph_1} の強制拡大モデルを構成できる。proper と呼ばれる性質を持つ半順序に関する強制公理 PFA について、proper 半順序のフィルターを付加する強制拡大の反復法は一般に \aleph_2 を壊すため、当初、PFA の強制拡大モデルは $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ を満たすものしか構成できなかった。後に Todorćević は「PFA ならば $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 」を証明した。これは強制法理論の限界を暗に示すもので、実際、無矛盾であることが証明された多くの数学的命題について、それらが $2^{\aleph_0} > \aleph_2$ と無矛盾であるかという問題は現在でも未解決である。2012 年、Asperó-Mota は PFA から結論付けられる多くの数学的命題を導く強制公理 fPFA を考案し、fPFA かつ $2^{\aleph_0} > \aleph_2$ を満たす強制拡大モデルを構成する反復法を開発した。Asperó-Mota のブレイクスルーによって、 $2^{\aleph_0} > \aleph_2$ と無矛盾であるかが未解決な問題が少しずつ解決されてきている。

2. 研究の目的

Asperó-Mota 反復強制法はある種のプロパー強制法に関する強制公理を満たし、連続体濃度を \aleph_2 よりも大きくする手法として開発された。Asperó-Mota 反復強制法のさらなる応用で、新規の無矛盾結果を得ることが目的の一つである。

Asperó–Mota 反復強制法はサイドコンディションに割り当てられるマーカールにも対称性条件を加えたバリエーションが考えられる。しかしマーカールにも対称性条件を加えると、反復強制法の長さが ω_2 よりも長い場合、その反復強制法が proper であることを示すことが困難になる。本研究においてこの困難さを明らかにする。

依岡は Todorčević のサイドコンディション法を備えたいくつかの強制法はランダム実数を付加しないことを示した。その証明を参考に、Chodounský–Zapletal は Y-Proper という強制法の性質と Y-Proper Forcing Axiom YPFA を導入した。Y-Proper Forcing Axiom は $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ や MA_{\aleph_1} の部分公理や Sacks 強制法の強制公理などを導く。本研究ではサイドコンディション法を備えた強制法と Y-proper であることの関係性を見出す。

3. 研究の方法

積極的に様々な研究者と研究打ち合わせを行い、成果発表を行った。研究実施において、研究費のほとんどは旅費に費やされた。

4. 研究成果

学術論文 [1] Tadatoshi Miyamoto and Teruyuki Yorioka, A fragment of Asperó–Mota’s Finitely Proper Forcing Axiom and entangled sets of reals, *Fund. Math.* 251 (2020), 35–68.

Abraham–Shelah は、2 以上の整数 n に対して n -entangled という実数の集合を導入して、「 n -entangled な実数の不可算集合は存在しない」ことが Proper Forcing Axiom から導かれて Martin’s Axiom からは導かれないことを示した。宮元–依岡は Asperó–Mota が導入した finitely properness を変形した solid properness を導入し、solid proper を満たす強制法に関する強制公理から「 n -entangled な実数の不可算集合は存在しない」ことが導かれないことを証明し、Abraham–Shelah の定理を拡張した。

[2] Tadatoshi Miyamoto and Teruyuki Yorioka, Forcing the Mapping Reflection Principle by finite approximations, *Arch. Math. Logic* 60 (2021), 737–748.

Moore は Bounded Proper Forcing Axiom から $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が導かれることを証明するために Mapping Reflection Principle を導入した。Mapping Reflection Principle を証明するために Moore は可算近似の強制法を用いた（そしてそれは実数を付加しない強制法であった）が、宮元–依岡は有限近似の強制法により Mapping Reflection Principle を強制する手法を編み出した。さらに、その強制法が Y-proper であることを示すことで、Y-Proper Forcing Axiom から Mapping Reflection Principle が導かれることを示した。

[3] Teruyuki Yorioka, Asperó–Mota iteration and the size of the continuum, *J. Symbolic Logic*, 88 (2023), no. 4, 1387–1420.

この論文では、連続体仮説が \aleph_2 以下であることを導く Moore の命題を有限近似の強制法の反復強制法で強制できることを示し、さらに Moore の命題をサイドコンディションに割り当てられるマーカーにも対称性条件を加えた Asperó–Mota 反復強制法で強制できることを示した。この反復強制法の長さが ω_2 より長いときは proper でないことも示した。この証明を通じて、サイドコンディションに割り当てられるマーカーにも対称性条件を加えた Asperó–Mota 反復強制法の長さが ω_2 より長いときは proper でないこともあることを立証できた。

- [4] Teruyuki Yorioka, Two chain conditions and their Todorčević’s fragments of Martin’s Axiom, *Ann. Pure Appl. Logic*, 175 (2024) 103320, special issue in honor of Kenneth Kunen (1943–2020).

Larson–Todorčević は rectangle refining property (rec) を導入し、「Suslin tree が $\text{MA}_{\aleph_1}(\text{rec})$ を強制する」ことが無矛盾であることなどを示している。依岡は Todorčević の Martin’s Axiom の fragments に関する研究で R_{1,\aleph_1} という可算さ条件よりも強い条件を与え、「 $\text{MA}_{\aleph_1}(R_{1,\aleph_1})$ を満たし, special でない Aronszajn tree が存在する」ことが無矛盾であることを示した (Teruyuki Yorioka, A non-implication between fragments of Martin’s Axiom related to a property which comes from Aronszajn trees, *Ann. Pure Appl. Logic* 161/4 469-487). rectangle refining property と R_{1,\aleph_1} はどちらもある種の構造に不可算反鎖を有限近似で加える強制法が満たす条件であり、良く似た性質である。この論文では、「special でない Aronszajn tree が存在する」という命題を利用して、rectangle refining property と R_{1,\aleph_1} の違いを明らかにした。その際に Y-proper の概念を用いている。

これらの他に次の論文を投稿中である。

- [5] Teruyuki Yorioka, Applications of the side condition method.

この論文ではいくつかの典型的な Todorčević のサイドコンディション法の利用法をまとめ、さらにそれらの強制法が持つ特別な性質を示している。特に、Asperó–Mota が有限近似の強制法で Weak Club Guessing と \mathfrak{h} を強制した手法をサイドコンディション法で表し、それが Y-proper であることを示した。これにより、Weak Club Guessing と \mathfrak{h} は Y-Proper Forcing Axiom から導かれることを示した。

- 成果発表**
- 2018 年 9 月 24 日, ランダム強制法による拡大モデルの中での弱い Martin’s Axiom, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 岡山大学.
 - 2018 年 7 月 2 日, A fragment of Asperó–Mota’s Finitely Proper Forcing Axiom and an entangled set of reals, Novi Sad Conference in Set Theory and General Topology, SETTOP 2018, University of Novi Sad.
 - 2018 年 11 月 5 日, The difference between two properties of Aronszajn trees, RIMS

共同研究（公開型）「公理的集合論とその応用」，京都大学数理解析研究所.

4. 2019 年 3 月 20 日， $(\omega^\omega, <^*)$ 上の極大飽和直線と実数直線の性質，2019 年度日本数学会年会，東京工業大学.
5. 2019 年 8 月 6 日，YPFA implies MRP, Set theory of the Reals (19w5064), The Casa Matemática Oaxaca (CMO) (招待講演).
6. 2019 年 9 月 19 日，梯子系の色付けの一様化とトドロチェビッチによるマーティンの公理の部分公理，日本数学会 2019 年度秋季総合分科会，金沢大学.
7. 2019 年 11 月 6 日，8 日，9 日，Applications of Todorčević's side condition method (Tutorial), IPM Set Theory Conference 2019, IPM Niavaran Building, Niavaran Square, Tehran, Iran (招待講演).
8. 2019 年 11 月 22 日，Todorčević's fragments of Martin's Axiom and some weak form of uniformization of a ladder system coloring, RIMS Set Theory Workshop 2019: Set Theory and Infinity, 京都大学数理解析研究所.
9. 2021 年 3 月 10 日，Preservation of Cohen reals, Kobe Set Theory Workshop 2021 – on the occasion of Sakaé Fuchino's Retirement –, 神戸大学 (Zoom 会議, 招待講演).
10. 2022 年 3 月 29 日，梯子系の色付けの σ -一様化とトドロチェビッチによるマーティンの公理の部分公理，2022 年度日本数学会年会，中央大学.
11. 2022 年 10 月 27 日，Asperó-Mota iteration and the size of the continuum, RIMS Set Theory workshop 2022 京都大学数理解析研究所 (招待講演).
12. 2023 年 9 月 23 日，トドロチェビッチによるマーティンの公理の部分公理と様々な梯子系の色付けの一様化，日本数学会 2023 年度秋季総合分科会，東北大学.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Miyamoto Tadatoshi、Yorioka Teruyuki	4. 巻 251
2. 論文標題 A fragment of Aspero-Mota 's finitely proper forcing axiom and entangled sets of reals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Fundamenta Mathematicae	6. 最初と最後の頁 35 ~ 68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/fm814-11-2019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Justin Tatch Moore and Teruyuki Yorioka	4. 巻 2164
2. 論文標題 Todorcevic 's Axiom K_2 and ladder system colorings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 104-107
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Miyamoto Tadatoshi、Yorioka Teruyuki	4. 巻 60
2. 論文標題 Forcing the Mapping Reflection Principle by finite approximations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 737 ~ 748
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00153-020-00756-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 YORIOKA TERUYUKI	4. 巻 88
2. 論文標題 ASPERO-MOTA ITERATION AND THE SIZE OF THE CONTINUUM	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Journal of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 1387 ~ 1420
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/jsl.2022.37	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yorioka Teruyuki	4. 巻 175
2. 論文標題 Two chain conditions and their Todor?evi?'s fragments of Martin's Axiom	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Annals of Pure and Applied Logic	6. 最初と最後の頁 103320 ~ 103320
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apal.2023.103320	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 依岡輝幸
2. 発表標題 トドロチェビッチによるマーティンの公理の部分公理と様々な梯子系の色付けの一般化
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Teruyuki Yorioka
2. 発表標題 Aspero-Mota iteration and the size of continuum
3. 学会等名 RIMS Set Theory workshop 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 依岡輝幸
2. 発表標題 梯子系の色付けの σ -一般化とトドロチェビッチによるマーティンの公理の部分公理
3. 学会等名 2022年度日本数学会年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Teruyuki Yorioka
2. 発表標題 Preservation of Cohen reals
3. 学会等名 Kobe Set Theory Workshop 2021 -- on the occasion of Sakae Fuchino's Retirement -- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Teruyuki Yorioka
2. 発表標題 YPFA implies MRP
3. 学会等名 Set theory of the Reals (19w5064), at The Casa Matematica Oaxaca (CMO). (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 依岡輝幸
2. 発表標題 梯子系の色付けの一様化とトドロチェビッチによるマーティンの公理の部分公理
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Teruyuki Yorioka
2. 発表標題 Applications of Todorcevic's side condition method (Tutorial)
3. 学会等名 IPM Set Theory Conference 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Teruyuki Yorioka
2. 発表標題 Todorčević's fragments of Martin's Axiom and some weak form of uniformization of a ladder system coloring
3. 学会等名 RIMS Set Theory Workshop 2019: Set Theory and Infinity (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Teruyuki Yorioka
2. 発表標題 A fragment of Aspero-Mota's Finitely Proper Forcing Axiom and an entangled set of reals
3. 学会等名 Novi Sad Conference in Set Theory and General Topology, SETTOP 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 依岡輝幸
2. 発表標題 ランダム強制法による拡大モデルの中での弱い Martin's Axiom
3. 学会等名 日本数学会 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 依岡輝幸
2. 発表標題 $(\aleph_{\omega}^{\aleph_{\omega}}, <^*)$ 上の極大飽和直線と実数直線の性質
3. 学会等名 2019年度日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Teruyuki Yorioka
2. 発表標題 The difference between two properties of Aronszajn trees
3. 学会等名 Workshop on Iterated Forcing Theory and Cardinal Invariants (RIMS workshop) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Teruyuki YORIOKA https://wpp.shizuoka.ac.jp/yorioka/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------