

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03397

研究課題名(和文) 反映原理の高濃度への一般化と基数算術

研究課題名(英文) Higher analogies of reflection principles and cardinal arithmetic

研究代表者

酒井 拓史 (Sakai, Hiroshi)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号：70468239

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：アレフ₂のレベルの反映原理は様々な興味深い帰結を持つことが知られており、定常性反映原理やラドー予想をはじめ、これまでに多くの反映原理が定式化されている。また、それらの相互関係や、基数算術・無限組合せ論に及ぼす影響が幅広く研究されてきた。本研究では、これらの反映原理をアレフ₂より大きなレベルに一般化したものについて、それらの相互関係や基数算術に及ぼす影響を調べた。まず、高レベルの反映原理の相互関係については、アレフ₂レベルの関係が概ね一般化できることが明らかになった。一方で基数算術への帰結については、アレフ₂のレベルのものが、多くの場合に高レベルのものに一般化されないことが明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

定常性反映原理やフォード型反映原理などのアレフ₂レベルの反映原理は、マルティンの極大強制法公理という強い強制法公理から帰結され、この関係からも興味を持たれている。近年、強制法の手法の開発により、強制法公理の高レベルへの一般化が考察されている。これらの高レベルの強制法公理を考察する上で、本研究の研究成果は重要な知見となる。また、反映原理や強制法公理に限らず、アレフ₁やアレフ₂のレベルの集合や数学的構造については理解が進んでいるが、より高レベルの集合や数学的構造についての理解は集合論の大きな課題になっている。本研究の成果は、この集合論の課題の克服に貢献するものである。

研究成果の概要(英文)：Set theorists have been interested in reflection principles at \aleph_2 since they have many interesting consequences on cardinal arithmetic and infinite combinatorics. So far, many reflection principles at \aleph_2 have been formulated, and the relationships among them and their consequences are studied extensively. These reflection principles can be naturally generalized to those at larger cardinals, which we call higher analogues. In this research, I studied these higher analogues of reflection principles at \aleph_2 such as the stationary reflection principle and the Rado conjecture. Especially, I focused on the relationships among them and their consequences on cardinal arithmetic. As a result, it turned out that the relationships among higher analogues are similar to those among reflection principles at \aleph_2 . Also, I could prove that many of higher analogues do not have similar consequences on cardinal arithmetic to those of reflection principles at \aleph_2 .

研究分野：公理的集合論

キーワード：反映原理 基数算術 巨大基数

1. 研究開始当初の背景

無限基数 κ に対して、「濃度が κ 以上の数学的構造の性質が、濃度 κ 未満の部分構造に反映する」という形の主張を \aleph_2 レベルの反映原理と呼ぶ。 \aleph_2 レベルの反映原理については、定常性反映原理・ラドー予想・フォドア型反映原理など、これまで様々なものが定式化され、それらが強制法公理と関係することや、基数算術や無限組合せ論に多くの帰結を持つことから、興味を持たれている。これまでに、それらの相互関係や帰結について幅広く研究されており、特に基数算術への帰結については、これらの反映原理のうちの多くから、連続体濃度が \aleph_2 以下になることや、特異基数仮説が帰結されることが知られている。

これらの \aleph_2 レベルの反映原理は、 \aleph_3 レベルや \aleph_4 レベルなど、より高いレベルの反映原理に自然に一般化できるが、一般化された反映原理の帰結や相互関係については研究が進んでおらず、理解が乏しかった。近年、強制法公理のより高いレベルへの一般化が考察されており、反映原理の一般化についても考察することが望まれていた。

2. 研究の目的

本研究では、定常性反映原理・ラドー予想・フォドア型反映原理・ゲーム反映原理を中心に、 \aleph_2 レベルの反映原理をより高いレベルに一般化したものについて、それらの相互関係と基数算術への帰結を明らかにすることを目的とした。

3. 研究の方法

\aleph_2 レベルの定常性反映原理・ラドー予想・フォドア型反映原理・ゲーム反映原理の相互関係や帰結が、高レベルの定常性反映原理・ラドー予想・フォドア型反映原理に一般化できるかどうかを、強制法や無限組合せ論を用いて詳しく調査した。ゲーム反映原理とフォドア型反映原理の一般化については、神戸大学名誉教授の淵野昌氏と共同で研究した。

4. 研究成果

\aleph_2 レベルの反映原理の間の相互関係は、概ね高レベルのものに一般化できることが明らかになった。一方で、 \aleph_2 レベルの反映原理の基数算術への帰結については、高レベルのものに一般化されない事例が多くあることが明らかになった。後者は、 \aleph_2 レベルの反映原理の特殊性を浮き彫りにするもので、興味深い事実であると思われる。以下にそれぞれの反映原理について得られた研究成果を詳しく述べる。上述のように、(1) ゲーム反映原理と (2) フォドア型反映原理についての研究成果は、神戸大学名誉教授の淵野昌氏との共同研究で得られたものである。

(1) ゲーム反映原理

\aleph_2 レベルのゲーム反映原理は、 \aleph_2 が \aleph_1 -閉な強制法に関してジェネリック超コンパクトであることと同値で、これから \aleph_2 レベルの定常性反映原理・ラドー予想・フォドア型反映原理が導かれる。また基数算術について、これから連続体濃度が \aleph_1 であることと特異基数仮説が帰結される。

正則基数の後続基数である κ に対しては、これらの事実が κ レベルのものに概ね一般化できることが明らかになった。つまり、 κ が正則基数 μ の後続基数であるとき、 κ レベルのゲーム反映原理は、 κ が μ -閉な強制法に関してジェネリック超コンパクトであることと同値で、これから κ レベルの定常性反映原理・ラドー予想・フォドア型反映原理が帰結されることが分かった。また、 κ レベルの反映原理から、連続体濃度が κ 未満になることや特異基数仮説が帰結されることも明らかになった。

(2) フォドア型反映原理

\aleph_2 レベルのフォドア型反映原理は、グラフの非可算色付け数の反映原理・strongly almost disjoint family の反映原理・局所可算コンパクト空間の距離付不可能性についての反映原理など、 \aleph_2 レベルの多くの反映原理と同値になることが知られていた。また、 \aleph_2 レベルのフォドア型反映原理は、 \aleph_2 レベルのラドー予想から帰結される。2 より大きな自然数 n に対しては、これらの \aleph_2 レベルの反映原理の間の相互関係が、 \aleph_n レベルのものに概ね一般化されることを

明らかにした。

一方で基数算術に関しては、 \aleph_2 レベルのフォドア型反映原理からは特異基数仮説が帰結されるが、 n を 2 より大きな自然数としたとき、 \aleph_n レベルのフォドア型反映原理からは特異基数仮説が帰結されないことが明らかになった。

(3) 定常性反映原理

\aleph_2 レベルの定常性反映原理からは基数算術について、連続体濃度が \aleph_2 以下になることと特異基数仮説が帰結される。本研究では、 \aleph_2 より大きな正則基数 κ に対して、 κ レベルの定常性反映原理を、共終数が可算の列で内部到達可能な集合族に制限したもの（共終数可算部分と呼ぶ）と、共終数が非可算の列で内部到達可能な集合族に制限したもの（共終数非可算部分と呼ぶ）の二つに分割し、それぞれの基数算術への帰結を詳しく調べた。

まず、 κ レベルの定常性反映原理の共終数可算部分からは、連続体濃度が κ 以下になることと特異基数仮説が帰結されることが明らかになった。一方で共終数非可算部分については、連続体濃度に上限を与えず、特異基数仮説も帰結しないことを明らかにした。さらに共終数非可算部分は、他の基数算術にもほとんど帰結を持たないことも分かった。

なお、共終数非可算部分についてのこれらの事実の証明の中で、共終数非可算の列で内部到達可能な集合は、良い性質の強制拡大では実質的に変わらないことも明らかにしている。この事実は次の (4) の研究成果でも応用されており、今後も幅広く応用されることが期待される。

(4) ラドー予想

先述のように、 \aleph_2 レベルのラドー予想からはフォドア型反映原理が帰結され、この関係は高レベルのものに一般化される。基数算術については、 \aleph_2 レベルのラドー予想からは連続体濃度が \aleph_2 以下であることと特異基数仮説が帰結されるが、これは高レベルのものに対して一般化されないことが明らかになった。特に、 n を 2 より大きな自然数としたとき、 \aleph_n レベルのラドー予想は連続体濃度に上限を与えず、また特異基数も帰結しないことを示した。

【今後の展望】

本研究により、 \aleph_2 の反映原理を高レベルに一般化したものについて、それらの相互関係や基数算術に及ぼす影響が、幾分明らかになってきた。 \aleph_2 レベルの反映原理は、マルティンの極大強制法公理という強い強制法公理と関係することからも興味を持たれているが、近年、強制法公理の高レベルへの一般化も考察されている。高レベルの強制法公理と高レベルの反映原理の関係は今後の重要な研究課題である。また、 \aleph_2 レベルの反映原理は基数算術だけでなく、無限組合せ論にも多くの興味深い帰結を持つ。高レベルの反映原理から類似の帰結が得られるかどうか調べたい。

反映原理や強制法公理に限らず、 \aleph_1 や \aleph_2 レベルの集合と数学的構造については集合論で理解が進んでいるが、より高レベルの集合や数学的構造についての理解は乏しく、これは集合論の大きな課題になっている。本研究のような反映原理の高レベルへの一般化の研究を通じて、 \aleph_1 や \aleph_2 と、それらより大きな基数の類似性や差異を深く理解したい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fuchino Sakae, Ottenbreit Maschio Rodrigues Andre, Sakai Hiroshi	4. 巻 60
2. 論文標題 Strong downward Löwenheim-Skolem theorems for stationary logics, II: reflection down to the continuum	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 495 ~ 523
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-020-00751-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fuchino Sakae, Rodrigues Andre Ottenbreit Maschio, Sakai Hiroshi	4. 巻 60
2. 論文標題 Strong downward Löwenheim-Skolem theorems for stationary logics, I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 17 ~ 47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-020-00730-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Matsubara Yo, Sakai Hiroshi, Usuba Toshimichi	4. 巻 170
2. 論文標題 On the existence of skinny stationary subsets	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annals of Pure and Applied Logic	6. 最初と最後の頁 539 ~ 557
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apal.2018.12.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Cox Sean, Sakai Hiroshi	4. 巻 65
2. 論文標題 A variant of Shelah's characterization of Strong Chang's Conjecture	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Logic Quarterly	6. 最初と最後の頁 251 ~ 257
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/malq.201800082	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Cody Brent, Sakai Hiroshi	4. 巻 59
2. 論文標題 The weakly compact reflection principle need not imply a high order of weak compactness	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 179 ~ 196
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-019-00686-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fuchino Sakae, Sakai Hiroshi	4. 巻 2213
2. 論文標題 Generically supercompact cardinals by forcing with chain conditions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 94 ~ 111
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Hiroshi Sakai
2. 発表標題 An extension of the Subcomplete Forcing Axiom which implies diamond+
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所研究集会「実数の集合論における近年の進展」(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Sakai
2. 発表標題 An extension of the Subcomplete Forcing Axiom which implies diamond+
3. 学会等名 MFO Workshop "Set Theory" (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 酒井 拓史
2. 発表標題 Higher stationary reflection and cardinal arithmetic
3. 学会等名 RIMS Set Theory Workshop 2020: Reals and Topology (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroshi Sakai
2. 発表標題 On generalized notion of higher stationarity in $P_{\kappa}(\lambda)$
3. 学会等名 RIMS Workshop "Axiomatic Set Theory and its Applications" (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Sakai
2. 発表標題 On generalized notion of higher stationarity in $P_{\kappa}(\lambda)$
3. 学会等名 Reflections on Set Theoretic Reflection (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Hiroshi Sakai's Web Page
<http://www2.kobe-u.ac.jp/~hsakai/>
Hiroshi Sakai's Web Page
<http://www2.kobe-u.ac.jp/~hsakai/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 RIMS Workshop "New Developments in Forcing and Cardinal Arithmetic"	開催年 2022年 ~ 2022年
---	----------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------