

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03399

研究課題名（和文）離散極値構造の研究

研究課題名（英文）Extremal combinatorics in discrete structures

研究代表者

徳重 典英（Tokushige, Norihide）

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：00217481

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本課題研究は、極値組合せ論の問題に現れる離散極値構造を明らかにし、またそのための手法について考察するものである。主な成果を二つ挙げる。(1) 有限体上のベクトル空間に置いて指定された「型」を含まない集合を定式化し、スライスランク法のみでは得られない上界を得た。(2) 多重交差族について、対応する行列のスペクトラムを利用する手法を用いて解析し、多重交差族の測度の積の上界とそれを実現する構造を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上に述べた成果のうち、(1)については「非退化な」解を含まない集合に関する研究において、より強い「非退化性」を定式化し解析したことに意義がある。この視点はこの分野に新しい方向を与え、その後、SauermannやEllenbergによってさらに発展している。交差族を調べる手法はいろいろあるが、現在のところ(2)の成果は固有値を用いる手法によってのみ得られており、この点に特徴がある。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we studied the extremal structures appeared in extremal combinatorics, and also discussed methods for this purpose. The two main results are as follows. We obtained an upper bound for the size of a set without a given "shape" in a vector space over a finite fields. We determined the extremal structure of the largest multiply intersecting families by using the corresponding spectral information.

研究分野：組合せ論

キーワード：組合せ論 離散極値構造 交差族 ハイパーグラフ スペクトラルグラフ理論

1. 研究開始当初の背景

方程式の解を含まない極値構造について、長さ3の等差数列の場合にスライスランク法が大きな成功をおさめたが、その手法は長さ4の等差数列ではうまく機能しないことが認識されつつあった。グラフの独立数は隣接行列の固有値で評価できることがわかっていたが、ハイパーグラフの場合に対応する手法はなかった。交差族の極値構造については多くのことが知られていたが、一方、たとえば非自明な3重交差族の極値構造の詳細は知られていなかった。これらの問題点を解決するための手法等を研究する必要があると思われた。

2. 研究の目的

前項で述べたような具体的な離散極値構造を明らかにすること、そのために必要な手法を組合せ論的な道具に限定せず、代数的手法、確率論的手法もふくめて検討することが本研究の目的であった。

3. 研究の方法

前項の目的を達成するため、関連論文からの情報収集、共同研究者 (Sang June Lee, Mark Siggers, 見村万作人、小須田雅、加藤満生、櫻井太朗、関口次郎) との議論、研究集会への参加をおこなった。得られた成果についてはこまめに論文にまとめ発表した。

4. 研究成果

(1) n 点集合上の k 点集合族と l 点集合族が互いに交差するとき、2つの集合族のサイズの積の最大値が「スター」とよばれる構造によって達成されるための、 n, k, l についての条件について調べた。得られた結果を When are stars the largest cross-intersecting families? というタイトルの論文にまとめ、Discrete Mathematics に投稿し掲載された。

(2) t 交差族の最大サイズは Ahlswede と Khachatrian によって決定されており、その極値構造の安定性についても Friedgut や Filmus らの研究がある。Sang June Lee, Mark Siggers との共同研究により、我々は互いに t 交差する2つの集合族についてその測度の積の最大値を決定し、極値構造の安定性を示した。得られた成果を AK-type stability theorems on cross t -intersecting families というタイトルの論文にまとめ、European Journal of Combinatorics に投稿し掲載された。

(3) 有限体上のベクトル空間において連立一次方程式の「非退化」な解を含まないような集合の最大サイズについて見村万作人氏と共同研究した。特に、スライスランク法が直接適用できないような非退化性を導入し、具体例を検討した。得られた結果を Solving linear equations in a vector space over a finite field というタイトルの論文にまとめ、Discrete Mathematics に投稿し掲載された。関連する話題について RIMS 共同研究「代数的組合せ論と関連する群と代数の研究」で講演し、その内容は「スライスランク法とその周辺の話」というタイトルで数理解析研究所講義録に収録された。またオンライン開催された「スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第9回研究集会」でも講演した。さらにこの結果を含むより広い話題について「方程式の解に関する組合せ論の紹介」というタイトルで2022早稲田整数論研究集会において講演した。

(4) 交差族の問題から派生したある不等式の予想について小須田雅氏、加藤満生氏と共同研究した。不等式の各項にヤング図形を対応させ、これらのヤング図形がつくるポセットの構造を利用して、問題のある種の二部グラフのマッチング探索問題に帰着させ、計算機も援用してパラメタが小さい場合 (11以下の場合) の予想に証明を与えた。成果を Extending Muirhead's inequality というタイトルで論文にまとめ、Graphs and Combinatorics に投稿し掲載された。この結果について Muirhead's inequality and a maximal flow というタイトルで Daegu で開催された The 92nd KPPY Combinatorics Seminar において講演した。

(5) グラフの独立数は隣接行列の固有値を使って評価できる (ホフマンの定理)。Filmus, Konstantin, Golubev はこれをハイパーグラフに拡張する手法を提起した。その手法を精密化して応用することで、

多重交差族の測度の積の最大値と極値構造を決定した。成果を Application of hypergraph Hoffman's bound to intersecting families というタイトルで論文にまとめ、Algebraic Combinatorics に投稿し、掲載された。この内容について Renyi Institute 主催の webseminar “Extremal set systems” で講演した。

(6) 3重交差性をもつ交差族について研究した。成果は複数の論文にまとめ現在も投稿中のものもあるが、そのうちの一つは非自明な3重 k 点交差族に関するもので、対応する測度版の結果と確率論的な議論により、最大サイズを決定した。得られた成果は Non-trivial 3-wise intersecting uniform families というタイトルで Discrete mathematics に投稿し掲載された。

(7) ランダムグラフにおける最大クリークの個数の期待値に関して櫻井太郎氏と共同研究した。成果の一部は Counting cliques in a random graph というタイトルで arXiv:2208.07492 に発表済みであるが、その精密化、一般化については引き続き共同研究中である。

(8) 球面の配置に関する離散極値構造が高次元多面体と関連をもつことが知られている。これを紹介するため、数学セミナーで3回の連載記事を執筆した。関口次郎氏からこの内容とルート系と関連について指摘があった。これをどのように定式化できるのかについては、関口氏と検討中である。なお連載記事の一部について「円と直線のなす配置」というタイトルで研究会「直観幾何学 2023」で講演した。

(9) 離散極値構造に関する教科書を執筆し、Extremal problems for finite sets というタイトルで American Mathematical Society の Student Mathematical Library として出版された (Frankl 氏と共著)。

(10) リーチアウトのひとつとして、ラムゼー理論を一般向けに紹介する記事を執筆し「大きな有限に現れる構造をめぐって」というタイトルで現代思想の巨大数特集号に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tokushige Norihide	4. 巻 346
2. 論文標題 Non-trivial 3-wise intersecting uniform families	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 9pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2023.113368	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tokushige Norihide	4. 巻 5
2. 論文標題 Application of hypergraph Hoffman's bound to intersecting families	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 537 ~ 557
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/alco.222	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kato Mitsuo, Kosuda Masashi, Tokushige Norihide	4. 巻 37
2. 論文標題 Extending Muirhead's Inequality	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1923 ~ 1941
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-021-02356-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mimura Masato, Tokushige Norihide	4. 巻 344
2. 論文標題 Solving linear equations in a vector space over a finite field	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 11pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2021.112603	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 徳重典英	4. 巻 723
2. 論文標題 円と直線のなす配置 (3) グレイス、ブラウン、コクセター、ロンゲヒギンズ	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 48-53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 徳重典英	4. 巻 722
2. 論文標題 円と直線のなす配置 (2) 配置構造と多面体	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 62-67
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 徳重典英	4. 巻 720
2. 論文標題 円と直線のなす配置 (1) ミケル、ウォレス、クリフォード	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 46-52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lee, Sang June; Siggers, Mark; Tokushige, Norihide	4. 巻 82
2. 論文標題 AK-type stability theorems on cross t-intersecting families	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 European J. Combin.	6. 最初と最後の頁 20pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2019.07.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 徳重典英	4. 巻 2169
2. 論文標題 スライズランク法とその周辺の話題	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 53-62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tokushige, Norihide	4. 巻 343
2. 論文標題 When are stars the largest cross-intersecting families?	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 14pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.111645	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 徳重典英	4. 巻 47
2. 論文標題 大きな有限に現れる構造をめぐって	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 現代思想	6. 最初と最後の頁 66--77
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 徳重典英
2. 発表標題 円と直線のなす配置
3. 学会等名 研究会「直観幾何学2023」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 徳重典英
2. 発表標題 方程式の解に関する組合せ論の紹介
3. 学会等名 2022早稲田整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Norihide Tokushige
2. 発表標題 Solving linear equations in a vector space
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域第9回研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Norihide Tokushige
2. 発表標題 Some applications of hypergraph Hoffman's bound
3. 学会等名 Extremal set systems, zoom webinar at Renyi Institute（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Norihide Tokushige
2. 発表標題 Recent applications of the slice rank method
3. 学会等名 RIMS共同研究「代数的組合せ論と関連する群と代数の研究」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Norihide Tokushige
2. 発表標題 Muirhead's inequality and a maximal flow
3. 学会等名 The 92nd KPPY Combinatorics Seminar (Daegu) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Norihide Tokushige
2. 発表標題 Stability results in intersecting families
3. 学会等名 The 20th KIAS Combinatorics workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Peter Frankl, Norihide Tokushige	4. 発行年 2018年
2. 出版社 American Mathematical Society	5. 総ページ数 232
3. 書名 Extremal problems for finite sets	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関

韓国	Kyungpook National University	Duksung Women ' s University		
----	-------------------------------	------------------------------	--	--