科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 3 1 日現在

機関番号: 33910

研究種目: 基盤研究(C)(一般)

研究期間: 2018~2023

課題番号: 18K03405

研究課題名(和文)アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の再構成

研究課題名(英文)A refinement of quantum information theory by algorithmic randomness

研究代表者

只木 孝太郎 (Tadaki, Kohtaro)

中部大学・工学部・教授

研究者番号:70407881

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文):量子力学では確率概念が本質的な役割を果たす。この確率概念はボルン則として量子力学に導入される。しかしながら、量子力学を記述する今日の数学において、確率論とは測度論のことであり、ボルン則が基づく"確率概念"に関して、操作的な特徴付けは見当たらない。これまでの研究で私は、アルゴリズム的ランダムネスの概念装置に基づいて、"典型性原理"と呼ぶボルン則を操作主義的に明確化した代替規則を導入した。近年、量子力学の原理に基づく新しい情報処理技術として"量子情報理論"が注目を集めている。本研究では、量子力学の実際の問題での典型性原理の有効性を実証するため、典型性原理を量子情報理論に適用し、その再構成を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義 量子力学の中核にあるボルン則(波動関数の確率解釈)とアルゴリズム的ランダムネスを直接結び付ける試み は、これまでほとんど全く存在しなかった。特に、量子力学の公理系としての形式に深く立ち入り、量子力学と アルゴリズム的ランダムネスとを結び付ける研究は、私の知る限り、本研究が世界的に初めてのものである。本 研究はアルゴリズム的ランダムネスに基づいて量子力学の物理理論としての完全化を達成しようとするものであ り、量子力学に対する人類の理解を格段に深めるものであると私は考える。本研究の基礎科学に対する貢献、そ して本研究の人類の世界認識・宇宙認識に対する貢献は計り知れないものであると私は考える。

研究成果の概要(英文): The notion of probability plays a crucial role in quantum mechanics. It appears in quantum mechanics as the Born rule. In modern mathematics which describes quantum mechanics, however, probability theory means nothing other than measure theory, and therefore any operational characterization of the notion of probability is still missing in quantum mechanics. In our former works, based on the toolkit of algorithmic randomness, we presented an operational refinement of the Born rule, called the principle of typicality, for specifying the property of the results of quantum measurements in an operational way. We did this from the point of view of the many-worlds interpretation of quantum mechanics. In this research, we made applications of our framework to quantum information theory, including quantum error-correction and the security proof of the BB84 quantum key distribution protocol, in order to demonstrate how properly our framework works in practical problems in quantum mechanics.

研究分野: アルゴリズム的ランダムネス

キーワード: 典型性原理 量子情報理論 アルゴリズム的ランダムネス 量子力学 多世界解釈 確率解釈 ベルの 不等式 アルゴリズム的情報理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等に ついては、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1.研究開始当初の背景

本研究課題の申請時における背景・動機を解説する準備として、まず背景を成す基本事項から解説する。

(1) [準備:アルゴリズム的ランダムネスの基本事項]

アルゴリズム的ランダムネス(Algorithmic Randomness)は数学の一分野であり、与えられた特定の無限記号列について、ランダムか否かの分類を可能にする理論体系である。アルゴリズム的ランダムネスは「アルゴリズム的情報理論」とも呼ばれる。アルゴリズム的ランダムネスにおけるランダム性は、典型性と同義語である。アルゴリズム的ランダムネスでは、無限記号列のランダム性について、様々な観点からの定義が有り、それらの同値性が証明されているが、歴史的に最も古く基本的な概念が、Martin-Löf ランダム性である。これは実効的測度論に基づくランダム性の定義であり、どんな実効的零集合にも属さない無限記号列を、ランダムであるとする定義である。ここで実効的零集合とは、ある適切な意味で計算可能な零集合のことである。この定義は用いる測度に依存するが、本研究では測度としてベルヌーイ測度を考え、それに関してMartin-Löf ランダムな無限記号列について考察する。これは、直観的には、目の出方に偏りのあるサイコロを無限回繰り返し投げて得られる"典型的な"無限列に相当する。

(2)[準備:量子力学の基本事項]

量子力学は3つの公理 , , からなる。公理 は状態空間の存在と状態ベクトルに関する公理である。量子力学では、この公理 により、波の重ね合わせのように、複数の量子状態を重ね合わせた"重ね合わせの状態"が存在できる。公理 は閉じた量子系のユニタリー的な時間発展に関する公理(Schrödinger 方程式)である。公理 は測定に関する公理であり、「波動関数の確率解釈」または「ボルン則」とも呼ばれる。公理 によると、量子系の観測量にはオブザーバブルと呼ぶ自己共役作用素 A が対応し、その観測量の測定において可能な測定結果の集合は、A の固有値の集合で与えられる。測定毎に測定結果は確率的に現れ、その確率分布は量子系の測定直前の状態に基づいて計算される。このようにして、公理 を通じて、量子力学には確率概念が立ち現れ、それが本質的な役割を果たす。

(3) [本研究課題の申請時における背景・動機]

さて、同一の状態にある同一の量子系に対し、同一の測定を繰り返し、繰り返し行って生成されて行く測定結果の無限列を考えよう。実験者が操作的な対象として相手に出来るのは、このような測定結果の特定の無限列のみである。従って、一般に、操作主義的観点からは、量子測定の公理は、このような測定結果の特定の無限列の性質について主張を行うべきである。特定の無限列のランダム性は、正にアルゴリズム的ランダムネスの研究考察対象であり、このような観点から、私はこれまでの研究で、ベルヌーイ測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて、"確率の言葉"を用いることなく、公理 を操作主義的に明確化した代替規則(公理 T と呼ぶ)を提示した。そしてその妥当性を論証した。

ところで、量子力学の多世界解釈は、公理 を仮定せず、公理 , のみを仮定し、量子系の振る舞いに関して公理 と同等の予言を導こうとする試みである (下記、引用文献[Q]参照)。多世界解釈にも様々な亜種があるが、通常この導出においては、量子力学的な重ね合わせで多数共存する世界 (多世界)の中で、我々のいる特定の世界についてある仮定 (典型性)を置く必要がある。例えば、論文[Q]でもそのような仮定を置いている。しかし、論文[Q]は Martin-Löf ランダム性が発見される 10 年近く前に執筆されたものであり、この "典型性"という概念について数学的に上手く表現できていなかった。この "典型性"は正にアルゴリズム的ランダムネスで数学的に厳密に扱われるものである。

私はこれまでの研究で、ベルヌーイ測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて、この素朴な"典型性"の仮定を厳密化し、更に拡張・一般化した典型性原理(The Principle of Typicality)と呼ぶ公理を導入した。上記公理 T は、この典型性原理から容易に導かれるものであり、典型性原理は公理 の究極の操作主義的明確化である。

その上で、私は、測定過程の様々な設定で典型性原理の妥当性を検証した。その結果、(私が考えられ得る)あらゆる場面において典型性原理が妥当であることを理論的に確認した。このようにして、典型性原理に基づいて、量子力学における(私の考えられ得る限りの)全ての確率的現象が、統一的に説明できることがわかった。

2.研究の目的

上述の通り、量子力学では確率概念が本質的な役割を果たす。しかし、今日の量子力学では、確率とは物理的にはどのような概念なのか? この点が不明確なまま、確率概念が用いられているのである。このように、操作主義的に明確に定義されていない"確率概念"に基づいて、系の振る舞いに対し予言を行う現在の形の量子力学は、本来操作主義的であるべき物理理論としては不完全であると考えられる。

私はアルゴリズム的ランダムネスの専門家であるが、この疑問に直面して、量子力学の公理を、Martin-Löf ランダム性に基づく典型性原理で置き換える、という着想に至った。このように、典型性原理は公理 を操作主義的に明確にするものである。そして、私は、これまでの研究で、公理 の典型性原理への置き換えが妥当であることを理論的に確認した。

本研究の目的は、典型性原理に基づく我々の枠組が、量子力学の実際の問題の取扱いとその解析において如何に適切に機能するかを実証することである。近年、量子力学の原理に基づく新しい情報処理技術として"量子情報理論"が注目を集め、著しい発展を遂げている。本研究では、その目的達成のため、典型性原理を量子情報理論の各技術に適用し、それぞれの概念的精密化を行う。そして、この作業を通じて、典型性原理に基づき量子情報理論の再構成を行うものである。これにより、量子力学の実際の問題での(ボルン則の精密化である)典型性原理の有効性を実証する。

さて、量子力学とアルゴリズム的ランダムネスを結び付ける試みは、これまでほとんど全く存在しなかった。特に、量子力学の公理系としての形式に深く立ち入り、量子力学とアルゴリズム的ランダムネスとを結び付ける研究は、私がこれまでに推進して来た本研究に至る一連の研究が、世界的に見て初めてのものである。そして、本研究は、アルゴリズム的ランダムネスに基づいて、量子力学の物理理論としての完全化を達成しようとするものである。本研究の成果は、量子力学に対する人類の理解を格段に深めるものであると私は考える。本研究の基礎科学に対する貢献、そして、本研究の人類の世界認識・宇宙認識に対する貢献は計り知れないものであると私は考え、そのような理解の下、私は本研究を遂行した。

3 研究の方法

本研究は、現実世界を記述する物理理論の一つである量子力学を研究対象としている。しかし、本研究は、量子力学の理論的な整合性を追求し、それを高めようとするものであり、物理実験の必要はない。また、数学的には計算可能性を対象としているので、計算機実験なども通用しない純粋に理論的な考察のみから成る研究である。従って、本研究を成功させるためには、研究推進者である私が、本研究の着想を如何に拡充するかが重要な鍵となる。私が勤務する中部大学の日常の研究活動においては、本研究の着想を育み、日々の思索から湧き出る様々なアイデアについて理論的整合性と妥当性を検討し、自問自答しながら研究を進め、本研究課題の達成を目指す。同時に、得られた研究成果は国際会議・国内会議において逐一発表し、本研究成果の国内外への周知を行う。

研究期間中、予期せぬ事態として、2020年3月以降、新型コロナウィルス感染症のため、出張予定であった国際会議・国内学会がこぞって中止またはオンラインでの開催となるなど、本研究の遂行にとって、大きな様々な潜在的制約・障害が発生した。しかしながら、私は、そのような様々な制約・障害を物ともせず、万難を排して本研究を遂行した。

4.研究成果

本研究では、典型性原理に基づいて量子情報理論の再構成を行った。本研究以前の研究で私は、量子情報理論の主要な技術である量子暗号 BB84 に対して、典型性原理を適用し、既にその再構成・精密化に成功していた。そこで得た知見を量子情報理論の各構成技術に当てはめれば、容易に量子情報理論の再構成を行うことができる。2018 年度から始まる本研究において、この量子情報理論の再構成は、具体的には、次のように行った。

(1)2018年度の研究で、私は、手始めに、量子情報理論の基本技術である量子テレポーテーションおよびスーパーデンスコーディングに対して、典型性原理を適用し、それらの精密化と再構成行い、これに成功した。このようにして私は、本研究の開始と同時に、本研究の研究方針の有効性を確認し、本研究の方向性を確定させた。

2018 年度は、更に、想定外の成果として、ベルの不等式対量子力学論争の典型性原理からの導出・精密化にも成功した。ここで、ベルの不等式の精密化は、確率概念の操作主義的な精密化に関する私のこれまでの研究成果を利用して達成した。すなわち、隠れた変数理論に立脚し、ベルヌーイ測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて"古典的な"確率概念を操作主義的に精密に扱い、ベルの不等式を導いたのである。一方、ベルの不等式に対応し、かつ対立する量子力学における"等式"は、典型性原理に基づいて精密な導出を行った。このようにして、ベルの不等式対量子力学論争が、典型性原理に基づいて再構成され、精密化できることを明らかにした。以上の研究成果により、本研究では、早くも開始年度の2018 年度において、典型性原理の有効性と妥当性を追認し、実証した。

(2)2019 年度は、量子操作の再構成を行った。量子操作は、量子状態を別の量子状態に変換する最も一般的な操作であり、量子情報理論全般で本質的な役割を果たす。さて、量子状態は、最も一般的な設定では、"混合状態"と呼ぶ物理的な実体で与えられる。本研究以前の研究で私は、それまで曖昧であった"混合状態"という概念に対して、アルゴリズム的ランダムネスに基づく数学的な定義を与えた。そして、これに基づいて典型性原理を導入した。2019 年度は、この研究に立脚し、典型性原理に基づいて量子操作の精密化と再構成を行い、これに成功した。典型性原理に立脚し量子操作を再構成することは、量子操作をより精密に捉えることであり、今後

の大きな発展が期待できる。特に、この成果は量子情報理論のあらゆる分野に波及するものである。実際、この成果に基づいて、2019 年度は、更に量子誤り訂正理論の精密化・再構成に取り組み、これに成功した。

上述の通り、本研究では、想定外の成果として、2018 年度において、ベルの不等式対量子力学論争の典型性原理からの導出・精密化に成功していた。この論争を、完全な量子相関を持つ設定に拡張したものが、Greenberger-Horne-Zeilinger 実験(GHZ 実験)をめぐる論争である。2019 年度は、この GHZ 実験をめぐる論争についても、典型性原理からの導出・精密化に成功した。

以上の研究成果により、本研究では、2019 年度においても、典型性原理の有効性と妥当性を 追認し、実証した。

(3)2020年度は、2019年度までの研究成果に立脚し、具体的な量子誤り訂正符号について、典型性原理による精密化・再構成を行った。はじめに、主要な量子誤り訂正符号のクラスである Calderbank-Shor-Steane 符号(CSS符号)について、典型性原理による精密化・再構成を行った。そして、その成果に基づいて、CSS符号を特殊な場合として含むより広い量子誤り訂正符号のクラスであるスタビライザー符号について、典型性原理による精密化・再構成を行い、これにも成功した。

以上の研究成果により、本研究では、2020 年度においても、典型性原理の有効性と妥当性を 追認し、実証した。

(4)2021年度の研究では、以上の研究成果に立脚し、量子情報源符号化、量子通信路上での古典情報の通信路符号化、量子通信路上での量子情報の通信路符号化などに対し、次々と典型性原理を適用し、それらの再構成と精密化を行った。なお、これら量子通信路における通信路符号化の再構成を行う前提として、シャノンによって示された古典通信路上での古典情報の通信路符号化に関する主定理である"通信路符号化定理"をアルゴリズム的ランダムネスにより再構成し、精密化した。これには確率概念の精密化に関する私の過去の研究成果を利用した。

ところで、量子暗号 BB84 の安全性証明は、量子情報理論の全般にわたる種々の結果を総動員して行われる。本研究の最後では、これまでに得られた成果に立脚し、典型性原理に基づいて、この BB84 の安全性証明を再構成し、その精密化に成功した。

以上のようにして、本研究では、量子情報理論を題材にして、典型性原理によりその精密化・ 再構成を行うことにより、典型性原理の有効性と妥当性を追認し実証し、典型性原理の有効性を 確固たるものにした。

2022 年度以降は、本研究で得られた膨大な研究成果を論文化し、また学会発表する等の作業を行った。そのような中、2023 年度は、エンタングルメント希釈並びにエンタングルメント濃縮の典型性原理による精密化と再構成に成功した。2023 年度は、更に、量子マックスウェルの悪魔の典型性原理による精密化と再構成に成功した。

(5)さて、量子力学の原理に基づく新しい情報処理技術として、近年、"量子情報処理技術"が注目を集め、大きな発展を遂げている。本研究で対象とする量子情報理論は、量子計算理論と共に量子情報処理技術を構成する二本柱の一つである。一方、近年、アルゴリズム的ランダムネスは、数学基礎論の一分野である計算可能性理論(Computability Theory)の主題となっており、活発に研究が進められている。これら2つの主題を完全な形で結びつける本研究は、私の知る限り世界で唯一無二であり、その成果は、計算可能性理論と量子情報理論の両研究分野の発展に、大きく貢献するものと考えられる。(なお、量子情報処理技術を構成するもう一方の柱である量子計算理論については、今後、本研究課題とは別の機会に、典型性原理に基づいて再構成と精密化を行う予定である。)

< 引用文献 >

[Q] H. Everett, III, "Relative State" formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, Vol.29, No.3, 454 - 462, 1957.

(注意)下記「5.主な発表論文等」の[学会発表]の項目において、『日本数学会 2022 年度 秋季総合分科会』と『日本数学会 2022 年度年会』の発表標題が、同じ"アルゴリズム的ランダ ムネスによる量子情報理論の精密化 VI"となっているのは、新型コロナウィルス感染症の影響 である。

5 . 主な発表論文等

3 . 学会等名

4 . 発表年 2024年

日本数学会 2024年度年会

t誌論文〕 計3件(うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件) .著者名	4 . 巻
Kohtaro Tadaki	arXiv:2312.13246 [quant-ph]
.論文標題	
A refinement of the argument of local realism versus quantum mechanics by algorithmic	2023年
randomness . 雑誌名	6.最初と最後の頁
arXiv	- AND CARROYS
載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子)	査読の有無
10.48550/arXiv.2312.13246	無
ープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著
. 著者名	4 . 巻
Kohtaro Tadaki	2154
.論文標題	5 . 発行年
A refinement of the argument of Bell's inequality versus quantum mechanics by algorithmic randomness	2020年
. 雑誌名	6.最初と最後の頁
京都大学数理解析研究所講究録	27-53
載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子)	 査読の有無
なし	無
ープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著
. 著者名	4 . 巻
Kohtaro Tadaki	arXiv:1909.02854 [math.PR]
. 論文標題	5 . 発行年
An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness II: Discrete probability spaces	2019年
. 雑誌名	6.最初と最後の頁
arXiv	-
載論文のDOI(デジタルオブジェクト識別子)	 査読の有無
10.48550/arXiv.1909.02854	無
ープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著
学会発表〕 計23件(うち招待講演 0件/うち国際学会 1件)	'
.発表者名	
只木孝太郎	
. 発表標題 アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化VIII	

1.発表者名
Kohtaro Tadaki
2. 発表標題
A refinement of the argument of local realism versus quantum mechanics by algorithmic randomness
3.学会等名
Seventeenth International Conference on Computability, Complexity and Randomness (CCR 2024)(国際学会)
4 . 発表年
2024年
1.発表者名
只木孝太郎
2.発表標題
A refinement of the theory of quantum information over noisy quantum channels by algorithmic randomness
,,,,,,,,,,,
3.学会等名
RIMS共同研究(公開型)「証明論と計算論の最前線」
4 . 発表年
2023年
1.発表者名
只木孝太郎
2.発表標題
アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化VII
3.学会等名
日本数学会 2023年度秋季総合分科会
4.発表年
2023年
1. 発表者名
只木孝太郎
2.発表標題
A refinement of quantum mechanics by algorithmic randomness
3 . 学会等名
第1回中部量子若手ワークショップ
4.発表年
2023年

1.発表者名 只木孝太郎
2 . 発表標題 アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化VI
0 # A M C
3 . 学会等名 日本数学会 2022年度秋季総合分科会
4 . 発表年
2022年
1.発表者名
只木孝太郎
2.発表標題
アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化VI
2 24 4 77 7
3 . 学会等名 日本数学会 2022年度年会
4.発表年
2022年
1 . 発表者名
只木孝太郎
ハルナベル
2.発表標題
An operational refinement of Shannon's noisy-channel coding theorem by algorithmic randomness
3.学会等名
RIMS共同研究(公開型)「証明と計算の理論と応用」
4.発表年
2021年
1.発表者名
只木孝太郎
2
2.発表標題
アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化V
3 . 学会等名
日本数学会 2021年度秋季総合分科会
4 . 発表年 2021年

4 25 = 24.67
1.発表者名 只木孝太郎
スパナハル
2. 発表標題
A refinement of the quantum noiseless channel coding theorem by algorithmic randomness
3 . 学会等名
第38回 記号論理と情報科学 研究集会 (SLACS2021)
4 . 発表年
2021年
1.発表者名
2 . 発表標題
アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化IV
3.学会等名
日本数学会 2021年度年会
4. 発表年
2021年
1 改丰本々
1.発表者名 只木孝太郎
,
2. 発表標題
A refinement of the theory of Calderbank-Shor-Steane codes by algorithmic randomness
証明論研究集会2020
4.発表年
2020年
1 改丰本々
1.発表者名
只木孝太郎
2.発表標題
A refinement of the theory of quantum error-correction by algorithmic randomness
第37回 記号論理と情報科学 研究集会 (SLACS2020)
4. 発表年
2020年

1.発表者名 只木孝太郎
2 . 発表標題 アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化III
3 . 学会等名 日本数学会 2020年度秋季総合分科会
4 . 発表年 2020年
1.発表者名 只木孝太郎
2 . 発表標題 A refinement of Bell's inequality versus quantum mechanics argument by algorithmic randomness
3.学会等名 研究会「量子論の諸問題と今後の発展(QMKEK7)」<ポスター発表>
4 . 発表年 2020年
1.発表者名 只木孝太郎
2 . 発表標題 A refinement of Bell's inequality vs. quantum mechanics argument by algorithmic randomness
3 . 学会等名 2019年度 冬のLAシンポジウム
4 . 発表年 2020年
1.発表者名 只木孝太郎
2. 発表標題 A refinement of Bell's inequality vs. quantum mechanics argument by algorithmic randomness II: Refined analysis of the GHZ experiment
3.学会等名 RIMS共同研究(公開型)「証明論とその周辺」
4.発表年 2019年

1.発表者名 只木孝太郎
2 . 発表標題 アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化II
3.学会等名 日本数学会 2019年度秋季総合分科会
4 . 発表年
2019年
1.発表者名 只木孝太郎
2、改丰福度
2 . 発表標題 A refinement of quantum teleportation and superdense coding by algorithmic randomness
3.学会等名 第36回記号論理と情報科学研究集会(SLACS 2019)
4.発表年
2019年
1.発表者名 只木孝太郎
o TV-FEE
2 . 発表標題 アルゴリズム的ランダムネスによるベルの不等式対量子力学論争の精密化
3 . 学会等名 基研研究会 「熱場の量子論とその応用」 < ポスター発表 >
4. 発表年 2010年
2019年
1.発表者名 只木孝太郎
2 . 発表標題 アルゴリズム的ランダムネスによる量子情報理論の精密化I
2
3 . 学会等名 日本数学会 2019年度年会
4 . 発表年 2019年

1. 発表者名 只木孝太郎		
2. 発表標題 A refinement of Bell's inequality	y versus quantum mechanics argument by algorithmic	randomness
3.学会等名 新潟確率論ワークショップ		
4 . 発表年 2019年		
1.発表者名 只木孝太郎		
2. 発表標題 A refinement of the argument of E	Bell's inequality versus quantum mechanics by algo	rithmic randomness
3.学会等名 証明論研究集会2018		
4 . 発表年 2018年		
〔図書〕 計0件		
〔産業財産権〕		
〔その他〕 [ホームページ]		
Research on Algorithmic Dimensions, Algorithms://tadaki.org/	rithmic Randomness, and Their Extensions over Physics	
氏名 氏名	所属研究機関・部局・職	

7.科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------