

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03422

研究課題名(和文) 確率ボラティリティモデルに対する最適ヘッジ戦略の導出と数値計算法の研究

研究課題名(英文) Research on mathematical expressions and numerical methods of optimal hedging strategies for stochastic volatility models

研究代表者

新井 拓児 (Arai, Takuji)

慶應義塾大学・経済学部(三田)・教授

研究者番号：20349830

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：Barndorff-Nielsen and Shephardモデル(BNSモデル)に対するmean-variance hedgingの導出とその数値計算法の開発を目指した。得られた成果は、(1)デジタルオプションに対するlocal risk-minimizingの導出、(2)BNSモデルに対するオプション価格の分解公式と近似公式の導出、(3)教師無し深層学習を用いたBNSモデルのオプション価格計算である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ジャンプ型モデルに対するmean-variance hedgingの導出は難しく、本研究ではその準備段階しかできなかった。しかし、伊藤解析を用いた分解公式の研究や深層学習を用いたアプローチなど新たな試みに挑戦したことで、研究手法の幅を広げること成功した。様々な手法を組み合わせることにより、ファイナンスにおける数学的知見を金融実務へ還元する礎を築けたものと確信している。

研究成果の概要(英文)：This project aimed to derive an expression of the mean-variance hedging for the Barndorff-Nielsen and Shephard(BNS) model and develop its numerical scheme. The results obtained are (1) derivation of local risk-minimizing for digital options, (2) derivation of decomposition and approximation formulas for option prices for the BNS model, and (3) computation of option prices for the BNS model using unsupervised deep learning.

研究分野：解析学基礎

キーワード：数理ファイナンス 確率論 数値計算

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

オプションなどの金融派生証券の価格は、それを完全複製するヘッジ戦略の初期費用で与えられる。従って、取引可能な全ての金融派生証券に対して完全複製戦略が存在する完備市場に対しては、金融派生証券の価格付けやヘッジ戦略に関する理論は完全に確立されている。ところが、実データを用いた分析から経験的に知られている株価過程の特徴の多くは、代表的な完備市場モデルである Black-Scholes モデルでは捉えることができない。そこで、適宜 Black-Scholes モデルを拡張してより現実的と思われるモデルの構築が望まれる。この拡張には様々なものがあるが、大きな流れとしてジャンプを含んだモデルと確率ボラティリティモデルの2つが挙げられる。しかしこのように拡張されたモデルは、完全複製戦略が存在しない非完備市場モデルとなる。従って、完全複製戦略に代わる何らかの意味で最適となるヘッジ戦略を考えなくてはならない。

これまで様々な最適ヘッジ戦略が提唱されており、それらの性質や表現の導出に関する研究が盛んに行われてきた。とりわけ、mean-variance hedging(MVH) と local risk-minimizing(LRM) は代表的な最適ヘッジ戦略であり、30年近い歴史を持つ。ところが、MVH や LRM の数学的理論研究は大きく発展してきた一方、金融実務でも利用可能な研究成果は殆ど現れなかった。そこで私は2012年頃から、ジャンプ型モデルを対象に MVH と LRM の明示的表現の導出と数値計算法の開発を行ってきた。まず、Arai and Suzuki(International Journal of Financial Engineering, Vol.2, 1550015, 2015) では、Lévy 過程に対する Malliavin 解析を用いて、ジャンプ型確率微分方程式

$$dS_t = S_{t-} \left[\alpha_t dt + \beta_t dW_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma_{t,z} \tilde{N}(dt, dz) \right]$$

の解で株価過程が記述されるモデルを考え、それに対する LRM の表現を導出した。ここで、 W_t は1次元標準 Brown 運動、 $\tilde{N}(dt, dz)$ は、Poisson ランダム測度 $N(dt, dz)$ とその Lévy 測度 ν により $\tilde{N}(dt, dz) := N(dt, dz) - \nu(dz)dt$ と定義されるランダム測度である。この論文では、コールオプションなど代表的な金融派生証券に対して、係数過程 α_t 、 β_t 、 $\gamma_{t,z}$ がノンランダムとなる場合における LRM の明示的表現を導出した。さらに、Arai, Imai and Suzuki(International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol.19, 1650008, 2016) では、幾何 Lévy 過程モデル、つまり α_t 、 β_t が定数、 $\gamma_{t,z} = e^z - 1$ である場合に対して、コールオプションに対する LRM の高速 Fourier 変換を用いた数値計算法を開発した。また、Arai, Imai and Suzuki(Finance & Stochastics, Vol.21, pp.551-592, 2017) では、上述の結果を用いて、係数がランダムになる場合の代表例である Barndorff-Nielsen and Shephard モデル (BNS モデル) における LRM の明示的表現を導出し、数値計算も実行した。なお、BNS モデルとは Black-Scholes モデルを直接拡張して得られるジャンプ型確率ボラティリティモデルである。

一方、MVH の表現の導出は LRM と比較して格段に難しいため、株価過程がマルチンゲールである場合やノンランダム係数の場合など限定的なケースしか扱われていない。特に、数値計算法の開発は殆ど行われていなかった。そこで、Arai and Imai(Applied Mathematical Finance vol.25, pp.247-267, 2018) では、係数がランダムネスを含まない場合に対して、数値計算を考慮した MVH の表現を新たに導出し、高速 Fourier 変換を用いた数値計算法を提示した。しかし、BNS モデルのようにランダム係数を持つ場合に対する MVH の研究は、マルチンゲール性を持つなど特別な場合を除き、行われていない。

2. 研究の目的

本研究は、数理ファイナンスにおける最重要トピックの一つである「非完備市場における金融派生証券の最適ヘッジ戦略」に関するものである。目標は、Lévy 過程に対する Malliavin 解析を用いて BNS モデルに対する MVH の明示的表現を導出することと、高速 Fourier 変換をベースとした数値計算法の開発を行うことである。

MVHに関する先行研究は数学的理論研究が中心であり、金融実務でも利用可能となる具体的な研究成果は限定的である。とりわけ、ジャンプ型モデルに対するMVHの研究は少ない。本研究は、金融実務への貢献を常に念頭に置き、BNSモデルという具体的なジャンプ型モデルを対象に、単にMVHの表現を求めるだけでなく、実行可能な数値計算法の開発に即した明示的表現を導出し、実際に数値計算を行うことを目指すものである。

3. 研究の方法

当初はMalliavin解析を用いて研究を実施する予定であったが、それだけでは立ち行かなくなり伊藤解析も加えることにした。まず、MVHの導出への足掛かりを得るため、LRMの研究を深化させた。次に、Black-Scholes公式の展開を用いて、BNSモデルに対するオプション価格の分解公式や近似公式の導出を目指した。さらに、深層学習を用いた研究に着手しオプション価格の導出を試みた。

4. 研究成果

まず第一段階としてLRMの数値計算法の研究に取り組んだ。平成30年度(2018年度)には、基本的なジャンプ型モデルのフレームワークである幾何Lévyモデルに対し、ペイオフが指示関数で表現されるデジタルオプションに対するLRMの数学的導出に成功し、その成果をArai and Suzuki(Journal of Stochastic Analysis vol. 2, no. 4, article 5, 2021)にまとめた。次に、MVHの表現の導出に向け、BNSモデルのような確率ボラティリティーモデルに対するオプション価格公式の解析に取り組んだ。より具体的には、BNSモデルのような確率ボラティリティーモデルに対しては明示的なオプション価格公式を導くことはできないため、伊藤の公式を用いてBlack-Scholes公式を展開することにより、オプション価格の分解公式と近似公式の導出を目指した。令和元年度(2019年度)にこの研究に着手し、その成果を二つの論文Arai(Journal of Stochastic Analysis vol. 2, no. 2, article 3, 2021)、Arai(International Journal of Theoretical and Applied Finance vol. 25, 2250008, 2022)にまとめた。最終年度である令和4年度(2022年度)には、深層学習を用いたBNSモデルのオプション価格付けと言う新たな取り組みも開始し、教師無し学習によるオプション価格計算に成功し、その成果をArai(to appear in International Journal of Financial Engineering, 2023)にまとめた。

ジャンプ型モデルに対するMVHの導出は難しく、本研究課題ではその準備段階しかできなかった。その一方、伊藤解析を用いた分解公式の研究や深層学習を用いたアプローチなど新たな試みに挑戦したことで、研究手法の幅を拡げることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takuji Arai	4. 巻 -
2. 論文標題 Deep learning-based option pricing for Barndorff-Nielsen and Shephard model	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Journal of Financial Engineering	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takuji Arai	4. 巻 Vol. 2 No. 2
2. 論文標題 Alos Type Decomposition Formula for Barndorff-Nielsen and Shephard Model	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Stochastic Analysis	6. 最初と最後の頁 Article 3
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.31390/josa.2.2.03	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takuji Arai and Ryoichi Suzuki	4. 巻 Vol. 2 No. 4
2. 論文標題 A Clark-Ocone Type Formula via Ito Calculus and its Application to Finance	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Stochastic Analysis	6. 最初と最後の頁 Article 5
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.31390/josa.2.4.05	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takuji Arai	4. 巻 Vol. 25 No. 2
2. 論文標題 Approximate option pricing formula for Barndorff-Nielsen and Shephard model	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Journal of Theoretical and Applied Finance	6. 最初と最後の頁 2250008 ~ 2250008
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S021902492250008X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuji Arai	4. 巻 22
2. 論文標題 Pricing and hedging of VIX options for Barndorff-Nielsen and Shephard models	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Theoretical and Applied Finance	6. 最初と最後の頁 1950043 ~ 1950043
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219024919500432	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Arai Takuji, Imai Yuto	4. 巻 25
2. 論文標題 A numerically efficient closed-form representation of mean-variance hedging for exponential additive processes based on Malliavin calculus	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applied Mathematical Finance	6. 最初と最後の頁 247 ~ 267
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/1350486X.2018.1506259	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Arai Takuji, Asano Takao, Nishide Katsumasa	4. 巻 85
2. 論文標題 Optimal initial capital induced by the optimized certainty equivalent	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Insurance: Mathematics and Economics	6. 最初と最後の頁 115 ~ 125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.insmatheco.2019.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 新井拓児
2. 発表標題 Deep Learning-Based Option Pricing for Barndorff-Nielsen and Shephard Model
3. 学会等名 2022年度冬季JAFEE大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 新井拓児
2. 発表標題 Decomposition and Approximation for Barndorff-Nielsen and Shephard model
3. 学会等名 2021年度夏季JAFEE大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 新井拓児
2. 発表標題 Decomposition and Approximation for Barndorff-Nielsen and Shephard model
3. 学会等名 2020年度中之島ワークショップ「金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2020」(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takuji Arai
2. 発表標題 Pricing and hedging of VIX options for Barndorff-Nielsen and Shephard models
3. 学会等名 Vienna Congress on Mathematical Finance - VCMF 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuji Arai
2. 発表標題 A closed form representation of mean-variance hedging for additive processes via Malliavin calculus
3. 学会等名 40th Conference on Stochastic Processes and Their Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuji Arai
2. 発表標題 A closed form representation of mean-variance hedging for additive processes via Malliavin calculus
3. 学会等名 the 10th World Congress of the Bachelier Finance Society (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------