

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03427

研究課題名(和文)非線形発展方程式の複雑な爆発解に対する数値解析的研究

研究課題名(英文)A numerical study for complex blow-up solutions of nonlinear evolution equations

研究代表者

牛島 健夫 (USHIJIMA, TAKEO)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：30339113

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：非線形発展方程式の解は必ずしも時間大域的には存在せず、有限時刻で特異性を生じることがある。このような現象を解の爆発と呼ぶ。爆発に伴って解のノルムが無限大に発散するレートを爆発レートと呼ぶ。本研究では、爆発レートに関して以下のことを行なった。
1. リスケーリング・アルゴリズムを用いた爆発レートの数値的推定方法の提案とその改良及び応用範囲の拡大。2. 法線方向速度がその曲率の冪乗に比例して運動する平面曲線の運動(以下曲率流)を記述する偏微分方程式に対する数値実験。3. 曲率流をリスケールした方程式の進行波解の理論解析。4. 3の進行波解を用いた曲率流の爆発レートの上からの評価。

研究成果の学術的意義や社会的意義

解の爆発は、非線形偏微分方程式論における代表的な研究課題の一つであり、爆発解の様相の解明は重要な意義がある。有限な量しか扱うことのできない数値計算によって、解の発散の様相を捉えようという研究は長い歴史もあり、また本質的に困難な問題である。本研究はこの分野に新たな有用な手法を与えることになった。また曲率流の爆発解は複雑な爆発レートを持つのだが、本研究ではその様相について新たな理論的知見を与えた。

研究成果の概要(英文)：Solutions to nonlinear evolution equations do not always exist globally in time, and singularities can occur at finite times. Such a phenomenon is called blow-up. The rate at which the norm of a blow-up solution diverges to infinity is called the blow-up rate. In this research, the following were conducted with respect to the blow-up rate.

1. to propose a numerical estimation method of the blow-up rate using a rescaling algorithm, to improve the method, and to expand its range of applications; 2. Numerical experiments on partial differential equations describing the motion of a plane curve whose normal velocity is proportional to the power of its curvature (hereinafter referred to as "curvature flow"); 3. theoretical analysis of the traveling wave solution of the rescaled curvature flow; 4. evaluation of the blow-up rate of the curvature flow from above using the traveling wave solution of 3.

研究分野：応用解析

キーワード：解の爆発 リスケーリング・アルゴリズム 数値解析 曲率流

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 爆発レートを推定する数値手法

爆発問題の数値解析に関する研究は古くは1970年代から現代にいたるまで連綿と続けられている。Beger& Kohn (1988)はその一例である。これらの研究の多くは、できる限り爆発時刻の近くまで安定に数値計算を行うための解析や数値的な技術であった。しかし、このような方法では複雑な爆発レートを捕まえることは難しく、研究開始当初、複雑な爆発レートを再現・推定するような数値手法の研究は未だ行われていなかった。

(2) 曲率流の爆発解

平面閉曲線上の各点が、曲線の法線方向に曲率の冪乗 (p 乗) に等しい速度で運動する問題を、ここでは曲率流と呼ぶことにする。曲率流は非線形偏微分方程式で記述できるのだが、曲率流によって閉曲線は時間と共に縮まっていき、有限時刻でその曲率の最大値が無限大に発散し、解の爆発が起こる。Angenent (1991), Angenent&Velazquez (1995)の研究によって、 $p=1$ で曲線の回転数が2以上の場合に複雑な爆発レートを持つ爆発解の存在と、その具体的な爆発レートが与えられた。Winkler (2004)は p が1以下の場合にも、回転数が2以上の場合に複雑な爆発解が存在することを示したが、その具体的な爆発レートについては何も知られていなかった。

2. 研究の目的

非線形発展方程式には、曲率流の爆発解のように複雑な爆発レートを持つ解が存在する。このような複雑な爆発レートを持つ爆発解を、統一的に数値計算によって捕まえることはかなりの困難を伴った問題である。本研究の目的は、このような複雑な爆発レートを持つ爆発解を数値的に捕まえることのできる数学的にしっかりとした方法の開発・構築である。さらに、爆発レートが解析的には知られていない問題に対して、数値解析と数理解析両面からの研究を行うことである。

3. 研究の方法

(1) 爆発レートを推定する数値手法

曲率流を記述する非線形偏微分方程式は、スケール変換不変性を持っている。このようなスケール変換不変性を持つ非線形発展方程式の爆発解を数値計算する手法に、Berger&Kohn(1988)によるリスケーリング・アルゴリズムがある。本研究ではリスケーリング・アルゴリズムの手続きと爆発レートとの数学的に厳密な関係を見出し、爆発レートを数値的に推定する手法を構築する。この手法を曲率流のように複雑な爆発レートをもつ問題に適用した数値実験を行う。

(2) 曲率流の爆発解

曲率流を記述する非線形偏微分方程式を、スケール変換不変性から決まる変換でリスケールして得られる方程式の進行波解を考え、その理論解析を行う。進行波波の情報を用いて、爆発レートの評価を行う。

4. 研究成果

(1) 爆発レートを推定する数値手法

Anada, Ishiwata, Ushijima (2018) でリスケーリング・アルゴリズムを用いた爆発レートの数値手法の提案を行い、いくつかの爆発レートが知られた問題に対して、この手法が有効に働

くことを確かめた。これらの手法の精密化を試み、その結果を国内外の学会等で発表した。

- (2) 爆発レートの知られていない問題に対する(1)の方法による数値実験
 $p < 1$ の場合の曲率流に対して、(1)の手法を用いた数値実験を行ない、そのレートが $0.5 < p < 1$ の場合と $p = 0.5$ の場合で異なるように思われることを見出した。
- (3) リスケールした曲率流方程式の進行波解の漸近挙動
Anada, Ishiwata, Ushijima (2022) で曲率流を記述する非線形偏微分方程式を、スケール変換不変性から決まる変換でリスケールして得られる方程式の進行波解の漸近挙動に関する研究を行い、その挙動が p の値によって著しく異なることを見出した。この成果を国内外の学会等で発表した。
- (4) 曲率流の爆発解の爆発レートの上からの評価
(3)の進行波解を用いて、曲率流の爆発レートの上からの評価を行い、 $p = 0.5$ の場合、 $0.5 < p < 1$ の場合、 $p = 1$ の場合でそれぞれその評価が異なることを見出した。この成果を学術誌に投稿すると共に、学会等で発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Enatsu Yoichi, Ishiwata Emiko, Ushijima Takeo	4. 巻 14
2. 論文標題 Traveling wave solution for a diffusive simple epidemic model with a free boundary	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - S	6. 最初と最後の頁 835 ~ 850
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcdss.2020387	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Anada, Koichi; Ishiwata, Tetsuya; Ushijima, Takeo	4. 巻 39
2. 論文標題 Asymptotic expansions of traveling wave solutions for a quasilinear parabolic equation.	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Jpn. J. Ind. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 889-920
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-022-00532-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 穴田浩一, 石渡哲哉, 牛島健夫
2. 発表標題 Upper estimates for blow-up solutions of a quasi-linear parabolic equation
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Koichi Anada, Tetsuya Ishiwata, Takeo Ushijima
2. 発表標題 Asymptotic Expansions of Traveling Wave Solutions for a Quasilinear Parabolic Equation
3. 学会等名 Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2021（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 牛島健夫, 穴田浩一, 石渡哲哉
2. 発表標題 ある準線形放物型偏微分方程式の解の爆発について
3. 学会等名 Critical Exponent and Nonlinear Partial Differential Equations 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takeo Ushijima
2. 発表標題 On a numerical method for estimating blow-up rates
3. 学会等名 ICIAM 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 穴田 浩一, 石渡 哲哉, 牛島 健 夫
2. 発表標題 曲線短縮問題に現れる準線形放物型偏微分方程式に対する爆発解の漸近挙動に関する一考察
3. 学会等名 日本応用数理学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 牛島健夫
2. 発表標題 方程式のスケール不変性を用いた爆発解の爆発レートの数値的推定方法
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型)「次世代の科学技術を支える数値解析学の基盤整備と応用展開」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeo Ushijima
2. 発表標題 On a numerical method for estimating blow-up rates of nonlinear evolution equations
3. 学会等名 2018 China-Japan Workshop on Nonlinear Diffusion Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeo Ushijima
2. 発表標題 On a Numerical Method for Estimating Blow-Up Rates for Nonlinear Evolution Equations
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeo Ushijima
2. 発表標題 A numerical estimating method of blow-up rates for nonlinear evolution equations with a scale invariance
3. 学会等名 13th SIAM East Asian Section Conference 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 牛島健夫
2. 発表標題 スケール変換不変性を利用した複雑な爆発レートの数値的推定
3. 学会等名 数理工学センター (MCME) セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeo Ushijima
2. 発表標題 On a numerical method for estimating blow-up rates
3. 学会等名 ICIAM 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------