

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 7 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03434

研究課題名(和文)無限次元精度保証付き数値計算の新展開に向けての基礎的研究

研究課題名(英文) Innovative research for self-validating numerical method of infinite dimensional problems

研究代表者

中尾 充宏 (NAKAO, MITSUHIRO)

早稲田大学・理工学術院・その他(招聘研究員)

研究者番号：10136418

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：偏微分方程式を中心とする無限次元問題について、数値計算によってそれらの解を精度保証付きで求める手法の拡張・改良を行った。非線形楕円型問題の解の数値的検証で重要な、線形化逆作用素ノルムの効率的な評価法を与え、解の非存在証明にも適用した。また、有限要素近似とその誤差評価にもとづき、従来困難であった3次元一般領域における定常Navier-Stokes方程式の解に対する精度保証法を定式化し、その検証例を示した。熱方程式の半離散解に対する構成的誤差評価の改良を行い、放物型方程式の解の検証効率化を図った。非線形発展方程式の爆発解に関して、爆発時刻の精度保証方式を導出し、その数値例を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年の計算機技術の進歩によって、偏微分方程式を含めた非線形数値モデルに対する計算機援用証明(数値的検証)は、現象の理論的解明において重要な手段となりつつある。しかしながら、特に偏微分方程式の場合には、その誤差評価が複雑で精度も不十分なために適用対象が限定され、応用解析学や計算理工学上に現れる多くの実際的な非線形問題に対し、その実用性は未だに高いとは言い難い。本研究は、そのような難点を克服する手法の開発を旨として遂行したものである。本研究の成果では、流体問題の数値シミュレーションに対する信頼性保証に成功するなど、この分野のさらなる発展についてその突破口を見いだすことができた。

研究成果の概要(英文)：For infinite dimensional problems mainly centered on PDEs, we extended and improved the method of finding their solutions by numerical verification methods. We presented efficient estimates of the norm for linearized inverse operator, which is important in the numerical verification of the solution of nonlinear elliptic problems, and also applied it to the non-existence proof of the solution. Moreover, based on the finite element approximation and the error estimates, we realized the guaranteed computation for the solution of the stationary Navier-Stokes equation in the three-dimensional general domain, which was difficult in the past. Also by giving constructive error estimates for the semi-discrete solution of the heat equation, we improved the verification efficiency of the solution for parabolic problems. Regarding the blow-up solution of the nonlinear evolution equation, we formulated the guaranteed computation of the blow-up time with a numerical example.

研究分野：計算数学

キーワード：数値解析 精度保証付き数値計算 有限要素法の構成的誤差評価 解の数値的検証法 計算機援用証明

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

精度保証付き数値計算法(以下「数値的検証法」と同義)とは、問題に対する解の存在と誤差限界を数学的に保証するような数値計算法のことであり、コンピュータを使った数値的証明をも意味する。

研究代表者(中尾)は、早い時期からその無限次元問題への適用に関する意義に着目し、主として楕円型偏微分方程式に対する解の存在を計算機により立証する、という研究姿勢のもとに、この分野において常に世界に先駆けた研究業績を蓄積してきた。しかしながら、応用解析学あるいは計算理工学という広い観点からみて、このようなアプローチの対象は未だ十分広いとは言えず、常微分方程式と一部の偏微分方程式に限られている。特に偏微分方程式の場合には、その誤差評価のためには近代的偏微分方程式論にもとづく高度の関数解析を駆使する必要があるため、それを精度保証付きで数値的に扱う技術が格段に複雑となる。さらに検証精度も実用的には不十分なことが多く、応用解析学上に現れる実際的な非線形問題に対する適用性が高いとは未だ言い難い。例えば、精度保証向きにモデル問題を定式化すること自体にも多くの困難が伴い、無限次元を有限次元で近似した場合のギャップを埋める精度良い構成的誤差評価も一部を除いては容易ではない。また結果として得られる検証精度も粗い場合が多く、精度保証に関わる計算コストも非常に大きくなるため、各種数値シミュレーションの信頼性向上という点からも大きな課題となっている。

したがって、このような難点を克服して、研究代表者がこれまでに開発してきた楕円型および放物型方程式を中心とした数値的検証法を、さらに広範な無限次元の非線形数理モデルにまで拡大・展開し、その実用的意義を高めることが本分野の研究進展にとって不可欠である。

2. 研究の目的

近年の情報処理技術のめざましい発展により、連立方程式や非線形方程式など有限次元問題に対する精度保証は飛躍的な発展を遂げている。これに伴い微分方程式をはじめとする無限次元精度保証付き数値計算法も、工学や産業技術における数値シミュレーションの信頼性や、数学における計算機援用証明とも関連して一層その重要性を高めている。

研究代表者は、2階楕円型境界値問題の有限要素近似と、その構成的 **a priori** 誤差評価を区間解析と有効に組み合わせることにより、数学的厳密解が計算機上で捉えられることを **1988** 年世界に先駆けて立証した。この方式は、非線形偏微分方程式の有限要素近似解に対する数学的に厳密な **a posteriori** 誤差評価をも与えるものである。これは日本発の全くオリジナルな研究として、偏微分方程式に対する解の精度保証の先鞭を付け、その方法は代表者の名前を冠して「中尾の方法」と呼ばれ、内外に大きなインパクトを与えた。その後、周辺研究者の協力のもと、この原理にもとづく研究を進め、既に2階半線形楕円型方程式に関しては、これまでに検証精度・効率および適用領域の点で十分な実用レベルに達する成果を上げている。また、定常 **Navier-Stokes** 方程式をはじめとする流体方程式の実際的な問題、あるいは楕円型作用素の固有値問題や逆固有値問題にまで検証対象を広げて研究を進めてきた。また近年では、非線形発展方程式の解の精度保証に向けて取り組み、放物型方程式に対する新しい解の検証原理を見だし、既にその基本的な実用性の確認にも至っている。

しかしながら、前項にも触れたように、偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法については、数学的定式化の難しさとともに、それをコンピュータ上で実現するための技術的問題が山積している状況である。したがって、産業界をはじめとする計算理工学分野では、計算の信頼性を重要視する意識は高まっているものの、それを実装する数値計算効率の低さから、種々の数値シミュレーションにおける数学的な信頼性保証は、いまだに普及・定着していないのが実情である。本研究は、そのような現状を打開するために、既存の誤差評価手法を見直し、より強力な検証方式を理論的および計算工学的両面から追究し、実際問題に適用することによって、その有効性を実証し、この分野の研究を格段に進展させることをねらうものである。

3. 研究の方法

無限次元と有限次元のギャップを埋める手段として研究代表者が提唱した「楕円型境界値問題の有限要素近似とその構成的 **a priori** 誤差評価」というアイデアは、コンパクト作用素の不動点問題を基盤とした非線形問題の精度保証にとって本質的であることが近年明らかとなっている。これは離散化という近似理論が、連続系という無限次元にコンピュータによって接近できる根拠を提供し、その効用を実証されたことを示すものである。

偏微分方程式の解に対する数値的検証法の研究において、日本はこれまで研究代表者の研究グループが独自のアイデアによる先駆的な成果を上げ、この分野で常に世界をリードする研究体制を維持してきた。一方、早稲田大学の石進一教授の率いる研究グループは、有限次元問題と常微分方程式に関する精度保証研究において、世界的研究拠点を形成している。また最近同研究室では、若手とそのOBを中心として、偏微分方程式の解に対する精度保証研究が活発化しており、既に定常・発展両問題に関していくつもの重要な研究成果を導いている。

【1 研究目的、研究方法など(つづき)】

また、偏微分方程式の精度保証に関しては、代表者より少し遅れてドイツ Karlsruhe 大学の Plum 教授が、楕円型作用素の固有値を精度保証することによる解の検証原理を見だし、その後も同じ方向での研究を進展させている。同氏の方法は、近似理論を出発点とする代表者らの方向とは異なる立場をとるものであるが、近年、筆者と同氏とは緊密に研究情報交換を行い、一部は共同研究を実施するに至っている。

このように本研究は、代表者とその研究協力者および早稲田大学の研究グループ、さらにドイツの大学も含めた国際的にトップレベルの知見を結集して実施する点に大きな特色がある。

具体的には、以下に掲げる検討項目について研究協力者と緊密な情報交換と研究討論を行い、恒常的に研究を進める。

- (1) 3次元 Navier-Stokes 方程式の検証定式化とその実現
- (2) 非線形偏微分作用素に対する線形化逆作用素のノルム評価の改良
- (3) 熱方程式の周期解に対する構成的誤差評価
- (4) 非線形放物型方程式の新しい検証法とその実例
- (5) 楕円型および放物型問題の近似解に対する高精度誤差評価
- (6) 重調和方程式の近似解に対する構成的誤差評価
- (7) 無限次元問題に対する既存精度保証付き数値計算法の原理的・目的別の分類と適応性評価

4. 研究成果

研究代表者と研究協力者が、COVID-19 の中で、対面とオンライン打合せを駆使して緊密な研究討論と情報交換を行い、研究目的にしたがって恒常的に検討を進め、以下の成果が得られた。これらの成果は、偏微分方程式の解に対する数値的検証法を含め、精度保証付き数値計算法の研究進展に対して大きく貢献するものである。

- (1) 3次元 Stokes 方程式の有限要素解に対する構成的 a priori 誤差評価
3次元定常 Navier-Stokes 方程式の解に対する数値的検証を実現するためには、3次元 Stokes 方程式の有限要素解に対する a priori 誤差評価定数が必要となる。この評価は、従来用いていた2次元の手法では本質的に困難なため、研究協力者の劉氏が最近開発した非適合(nonconforming)有限要素法を活用した Stokes 作用素の固有値評価と、hypercircle method を用いた誤差評価を定式化した。このためには計算された近似解が divergence free となるような特別な有限要素空間の設定も重要な役割を果たしている。
- (2) 定常3次元 Navier-Stokes 方程式の検証定式化とその実現
Stokes 方程式の有限要素解に対する構成的 a priori 誤差評価を用いて、定常3次元 Navier-Stokes 方程式の解に対する数値的検証法を定式化し、非凸領域上の具体的問題に適用し、検証法の有効性を実証した。本結果は、3次元一般領域における世界に先がけた結果としても重要であり、高い注目を集めている。
- (3) 線形偏微分作用素に対する逆作用素ノルム評価の改良
非線形楕円型方程式の解に対する無限次元ニュートン法を適用した精度保証では、線形化逆作用素のノルム評価が本質的に重要な役割を果たす。本研究では楕円型作用素の係数関数の特性を活かした逆作用素ノルムの効率的計算法を提案し、実際の数値例でその有効性を示した。
- (4) 線形化逆作用素に対する近似逆作用素ノルムの収束性の考察
一般に、線形化逆作用素はコンパクトではないため、有限次元近似逆作用素自体は作用素ノルムの意味では収束しない。しかしながら、そのノルムの値は真の逆作用素のノルムに収束する可能性がある。本研究では、有限要素メッシュサイズをゼロに近づけると、当該有限要素空間で構成した近似逆作用素ノルムが真の逆作用素ノルムに収束する事実を見いだした。さらに、その収束速度に関する考察を行った。
- (5) 非線形楕円型問題に対する新たな数値的検証法の定式化
有限次元射影とその構成的誤差評価を用いた手法による数値的検証について、行列の Schur 補元と類似の概念を導入することによって、新たな定式化を与え、それが実用上でも従来の方式に比べて優れた特性をもつことを実例によって立証した。
- (6) 非線形楕円型方程式の解の非存在領域の検証法
非線形楕円型問題に対する有限次元射影とその構成的誤差評価を用いた手法により、近似解のある近傍には、解が存在しないことを証明する数値的手法を定式化し、検証数値例を与え有効性を示した。
- (7) 熱方程式に対する最良 a priori 誤差評価定数
熱方程式の初期値境界値問題に対する有限要素法による半離散解の a priori 誤差評価定数について考察し、その具体的値が楕円型方程式に対する離散化誤差と密接に関係することを解明した。特に、その最良評価を与えることに成功した。
- (8) 非線形発展方程式の解の爆発時刻に対する精度保証付き数値計算
非線形放物型方程式の解の爆発時刻を精度保証付きで求める手法の定式化を行い、その実例として空間1次元の藤田型方程式の解に対し、爆発時刻を高精度で包み込むことに成功した。この手法は、爆

【1 研究目的、研究方法など(つづき)】

発時刻の特定のみならず、初期値からは爆発が判定できない方程式の解が、実際に爆発することを証明できるものであり、世界に先がけた結果である。

(9) 偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法の体系化
これまでに開発・実装された偏微分方程式をはじめとする無限次元問題に対する数値的検証法と計算機援用証明法の原理的、目的別の分類と適応性の評価を行い、単行本(モノグラフ)としてとりまとめた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 Liu Xuefeng, Nakao Mitsuhiro T., You Chun 'guang, Oishi Shin' ichi	4. 巻 38
2. 論文標題 Explicit a posteriori and a priori error estimation for the finite element solution of Stokes equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 545 ~ 559
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-020-00449-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 K. Sekine, M. T. Nakao, S. Oishi	4. 巻 12
2. 論文標題 Numerical verification methods for a system of elliptic PDEs, and their software library, Nonlinear Theory and Its Applications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE	6. 最初と最後の頁 41-74
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1587/nolta.12.41	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 K. Sekine, M. T. Nakao, S. Oishi, M. Kashiwagi	4. 巻 169
2. 論文標題 A numerical proof algorithm for the non-existence of solutions to elliptic boundary value problems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Applied Numerical Mathematics	6. 最初と最後の頁 87-107
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apnum.2021.06.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 M. Mizuguchi, M. T. Nakao, K. Sekine, S. Oishi	4. 巻 89
2. 論文標題 Error Constants for the Semi-Discrete Galerkin Approximation of the Linear Heat Equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Scientific Computing	6. 最初と最後の頁 number 34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10915-021-01636-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kinoshita Takehiko, Watanabe Yoshitaka, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 369
2. 論文標題 Some lower bound estimates for resolvents of a compact operator on an infinite-dimensional Hilbert space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112561 ~ 112561
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112561	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sekine Kouta, Nakao Mitsuhiro T., Oishi Shin'ichi	4. 巻 146
2. 論文標題 A new formulation using the Schur complement for the numerical existence proof of solutions to elliptic problems: without direct estimation for an inverse of the linearized operator	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Numerische Mathematik	6. 最初と最後の頁 907 ~ 926
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00211-020-01155-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hashimoto Kouji, Kinoshita Takehiko, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 41
2. 論文標題 Numerical Verification of Solutions for Nonlinear Parabolic Problems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Numerical Functional Analysis and Optimization	6. 最初と最後の頁 1495 ~ 1514
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/01630563.2020.1777159	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Yoshitaka, Kinoshita Takehiko, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 154
2. 論文標題 Some improvements of invertibility verifications for second-order linear elliptic operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Numerical Mathematics	6. 最初と最後の頁 36 ~ 46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apnum.2020.03.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kimura Takuma, Minamoto Teruya, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 368
2. 論文標題 Constructive error estimates for full discrete approximation of periodic solution for heat equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112510 ~ 112510
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112510	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hashimoto, K., Kimura, T., Minamoto, T., Nakao, M.T.	4. 巻 36
2. 論文標題 Constructive error analysis of a full discrete finite element method for the heat equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 777-790
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-019-00362-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Y. Watanabe, T. Kinoshita, M. T. Nakao	4. 巻 154
2. 論文標題 Some improvements of invertibility verifications for second-order linear elliptic operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Numerical Mathematics	6. 最初と最後の頁 36-46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.apnum.2020.03.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kinoshita Takehiko, Watanabe Yoshitaka, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 266
2. 論文標題 An alternative approach to norm bound computation for inverses of linear operators in Hilbert spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 5431 ~ 5447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.10.027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Yoshitaka, Kinoshita Takehiko, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 An improved method for verifying the existence and bounds of the inverse of second-order linear elliptic operators mapping to dual space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-019-00344-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計25件(うち招待講演 6件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 水口 信, 中尾充宏, 関根晃太, 大石進一
2. 発表標題 楕円型方程式と放物型方程式に対する半離散ガレルキン近似の誤差定数について
3. 学会等名 日本応用数理学会 2021年度 年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 T. Kinoshita, Y. Watanabe, M. T. Nakao
2. 発表標題 On some convergence properties for finite element approximations to the inverse of linear elliptic operators
3. 学会等名 SCAN'2020 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 渡部善隆, 木下武彦, 中尾充宏
2. 発表標題 重調和方程式の近似解に対する構成的誤差評価の改良
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 渡部善隆, 長藤かおり, M. Plum, 木下武彦, 中尾充宏
2. 発表標題 Orr-Sommerfeld 方程式の臨界Reynolds数に対する計算機援用証明
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 M. T. Nakao
2. 発表標題 On some convergence properties of approximate inverse operator norm in FEM
3. 学会等名 International Workshop on Reliable Computing and Computer-Assisted Proofs (ReCAP 2022) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 木下武彦、渡部善隆、 中尾充宏
2. 発表標題 有界作用素のレゾルベントに対するある近似作用素の強収束性について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 渡部善隆、木下 武彦、中尾 充宏
2. 発表標題 Hilbert空間における線形作用素に対する可逆性検証の効率化
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 関根晃太、中尾充宏、大石進一
2. 発表標題 半線形楕円型偏微分方程式の解の局所非存在証明法
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 渡部善隆、木下武彦、中尾充宏
2. 発表標題 重調和方程式に対するLegendre多項式を用いた構成的誤差評価
3. 学会等名 第4回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会 (NVR 2020) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 関根晃太、中尾充宏、大石 進一
2. 発表標題 半線形楕円型偏微分方程式の線形化作用素 $L:D(\)$ L_2 に対するSchur補元を用いた逆作用素の表現方法
3. 学会等名 第4回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会 (NVR 2020) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 水口信、関根晃太、橋 本弘治、中尾充宏、大石 進一
2. 発表標題 藤田型方程式の解の爆発時間に対する計算機を用いた数値的包含方法について
3. 学会等名 2020年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kouji Hashimoto, Takuma Kimura, Teruya Minamoto, Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 Constructive error analysis of a full-discrete finite element method for the heat equation
3. 学会等名 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics-ICIAM (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 水口 信, 中尾 充宏, 関根 晃太, 大石 進一
2. 発表標題 線形熱方程式の解と半離散近似解との誤差評価の改善
3. 学会等名 日本応用数理学会 2019年度 年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木下武彦, 渡部善隆, 山本野人, 中尾充宏
2. 発表標題 H^1_0 関数の直交多項式近似に対する2 次の誤差評価の最良定数について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋本弘治, 中尾充宏
2. 発表標題 非線形発展方程式の初期値問題に対する数値的検証法
3. 学会等名 第24回 情報・統計科学(BIC)シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木下武彦, 渡部善隆, 中尾充宏
2. 発表標題 ある楕円型境界値問題から導かれる近似作用素のノルムの収束性
3. 学会等名 2019 年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuaki Tanaka, Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 A priori error estimates for Poisson 's equation with discontinuous coefficients
3. 学会等名 日本応用数理学会 2020年 研究部会連合発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 木下武彦、渡部善隆、中尾充宏
2. 発表標題 値域が共役空間となる楕円型作用素に対する精度保証付き可逆性検証
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 劉 雪峰、中尾充宏、遊 春光、大石進一
2. 発表標題 3次元領域におけるStokes 方程式の有限要素解の事前誤差評価
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中尾充宏
2. 発表標題 近似理論から計算機援用証明への道---偏微分問題の精度保証---
3. 学会等名 第18回早稲田大学 数学・応用数理談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 On the a priori error estimates of finite dimensional projections for applications to numerical verification of PDEs
3. 学会等名 The 18th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations(SCAN2018) （招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuma Kimura, Teruya Minamoto, Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 On the constructive error estimates of a full-discrete approximation for time-periodic solution of the heat equations
3. 学会等名 The 18th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations(SCAN2018) （国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 2階楕円型作用素に対する逆作用素ノルム評価の改良
3. 学会等名 日本応用数理学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 劉 雪峰, 中尾 充宏, 大石 進一
2. 発表標題 3次元領域におけるNavier-Stokes方程式の定常解の検証
3. 学会等名 日本応用数理学会年会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡部善隆 木下武彦 中尾充宏
2. 発表標題 2 階線形楕円型作用素に対する可逆性検証と精度保証付きノルム評価の改善
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Mitsuhiro T. Nakao, Michael Plum, Yoshitaka Watanabe	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Springer Nature Singapore	5. 総ページ数 467
3. 書名 Numerical Verification Methods and Computer-Assisted Proofs for Partial Differential Equations	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	渡部 (WATANABE Yoshitaka)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	劉 雪峰 (LIU Xuefeng)		
研究協力者	関根 晃太 (SEKINE Kouta)		
研究協力者	水口 信 (MIZUGUCHI Makaoto)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Karlsruhe Institute of Technology			