

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03657

研究課題名（和文）弦理論の幾何学とスペクトル理論

研究課題名（英文）Geometry in string theory and spectral theory

研究代表者

初田 泰之（Hatsuda, Yasuyuki）

立教大学・理学部・准教授

研究者番号：00581084

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では様々な文脈に現れる量子力学モデルの固有値問題を弦理論の幾何学的観点から調べることが目標とした。当初の目論見では2次元電子系の物理とトーリック・カラビ・ヤウ多様体上の位相的弦理論の対応関係を深化させることを主な目標としていたが、その後の研究においてブラックホールの摂動論と4次元超対称ゲージ理論との対応を新たに発見するに至って当初の想定以上の成果が得られた。このような対応関係を利用することで、一見現実とは無関係に思われる超対称性を持つ理論や弦理論が現実の物理系を記述し得る点を発見したことに意義があると考えられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で最も大きな成果はブラックホールの摂動論と超対称ゲージ理論の対応関係を新たに発見したことである。ブラックホールの摂動論ではアインシュタイン方程式は線形化され、適切の変数変換の下でシュレーディンガー型の常微分方程式の形になるが、この微分方程式が4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論のいわゆるSeiberg-Witten曲線を量子化したものと同一であることが分かった。後者の観点からはNekrasov分配関数の特殊な極限が自然に現れるが、この関数を使うことで前者の固有値問題、すなわちブラックホールの準固有振動モードの問題が解けることが分かった。重力波観測とも関係しているため非常に重要な成果である。

研究成果の概要（英文）：In this research project, my goal is to understand a relationship between spectral problems in various quantum mechanical systems and a geometrical approach in string theory.

My original attempt is to look into the correspondence between 2d electron systems and topological string theory on toric Calabi-Yau geometries. However I found a new correspondence between black hole perturbation theory and supersymmetric gauge theories. This correspondence allows us to "solve" an eigenvalue problem in black hole perturbation theory by using the result in the corresponding supersymmetric gauge theory. This is a new application of supersymmetric quantum field theories.

研究分野：素粒子論

キーワード：弦理論 超対称ゲージ理論 可積分系 ブラックホール摂動論 準固有振動モード

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

弦理論は重力を含む量子論を記述し得ると期待されているが、今なお完全な定式化は知られていない。特に弦理論を摂動論の枠組みを超えて、非摂動的に定式化することは重大な未解決問題である。この問題に関して過去の研究において、ある種の量子力学模型が位相的弦理論の非摂動的な性質を記述するのではないかという予想が立てられた。また別の研究においては、弦理論における特別なカラビ・ヤウ多様体が、ある種の2次元電子系を記述することが明らかになった。この事実は、とかく数学的であると思われがちの弦理論の研究において、実験で実現しうる現実的な物理系への応用を新たに提示した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、弦理論に現れるカラビ・ヤウ多様体の幾何学と量子可積分系および2次元電子系におけるスペクトル理論との対応を理解することである。具体的には、

弦理論の視点から、スペクトル理論に関する新たな知見を得ること

スペクトル理論を利用し、弦理論の摂動論を超えた枠組みを探索すること

の2点を目標にする。

3. 研究の方法

多くの量子力学模型において弦理論や超対称場の量子論との関係を見出すことを目指す。特に量子可積分模型や2次元電子系と弦理論との対応の探索を念頭において研究を進める。その他にも対応関係がありそうな固有値問題があれば先入観に囚われずに解析を進める。

4. 研究成果

(1) 2次元電子系

2次元格子上の電子模型としてよく知られている Hofstadter 模型について、そのスペクトルの解析的構造を詳しく調べた。弱磁場ではエネルギーはランダウ準位を形成し、磁束に関して摂動的に展開することができる。この摂動展開は発散級数であり、しかもボレル総和法の意味で総和不可能である。その帰結としてスペクトルは磁束に関して非摂動的補正を受ける。これは量子力学的には、ポテンシャルをすり抜けるインスタントン効果である。まず経路積分の観点からインスタントン補正の具体形を導いた。驚くべきことにこの補正はトリーク・カラビ・ヤウ多様体上の位相的弦理論の自由エネルギーと正確に一致することが確かめられた。位相的弦理論の自由エネルギーは正則アノマリー方程式によって極めて系統的に計算できるので、この関係は実用上有用である。

また蜂の巣格子模型に対応するカラビ・ヤウ多様体を探索し、紆余曲折を経て対応物を同定した。その結果、エネルギーバンド幅に対して、弱磁場極限下における解析的な結果を得ることに成功した。

(2) 量子可積分系

楕円型 Ruijsenaars-Schneider 模型のスペクトル問題について取り組んだ。可積分系の文脈において、この模型のエネルギー固有値を決定する完全な量子化条件は知られていなかった。この研究では5次元超対称ゲージ理論との関係に着目し、固有値を決める完全な方程式を予想することに成功した。その結果ゲージ理論における電磁双対性(S双対性)の構造が量子化条件においてもあらわに見えることがわかった。

(3) ブラックホールの準固有振動モード

ブラックホールの摂動論を考えると、2階の線形微分方程式が得られる。この固有方程式に適切な境界条件を課すと、固有値として離散的な複素数のみ許される。このような複素固有値は準固有振動数と呼ばれ、連星ブラックホールの合体の最終段階で重要な役割を果たす。観測との比較のためにも準固有振動数の計算は重要な課題である。本年度の研究では量子力学の摂動論に基づき、準固有振動数を効率よく計算するためのアルゴリズムを提唱した。摂動論は適用範囲が広く、様々なシチュエーションに応用できるのが利点である。ここで提唱したアルゴリズムも幅広いブラックホール時空に対して適用可能なので今後様々な応用が期待できる。

さらに回転するブラックホールにおける準固有振動モードの解析に取り組み、回転速度がスローなときの準固有振動数の半解析的結果を得た。Kerr ブラックホールの摂動論は Teukolsky 方

程式と呼ばれる 2 階線形微分方程式によって記述されるが、この方程式をスロー極限で調べることは難しい。そこで Teukolsky 方程式と等価な Chandrasekhar-Detweiler 方程式及び Sasaki-Nakamura 方程式に着目した。これらの方程式の利点は非回転極限で Schwarzschild ブラックホール摂動を記述する Regge-Wheeler 方程式に帰着するためである。この事実を利用して Kerr ブラックホールの角運動量を小さな摂動パラメータとみなすことで準固有振動数の摂動的結果を得ることに成功した。その他、Teukolsky 方程式と $N=2$ 超対称ゲージ理論との関係についても取り組んだ。

さらにこの対応を利用することで、対称性の構造が見えやすくなることを指摘した。興味深いことに、ゲージ理論側であらわな対称性の構造がブラックホール側では全く非自明な構造となっている。これを逆手に取ることで、ゲージ理論側の対称性を利用して、Teukolsky 方程式と同等ではあるが、より解析の容易な微分方程式を発見することに成功した。

また漸近平坦なブラックホールだけでなく、漸近 de Sitter ブラックホールについても準固有振動モードの解析を行った。Kerr de Sitter ブラックホールの摂動を記述する Teukolsky 方程式は 4 つの確定特異点を持つ Heun の微分方程式と同等であり、その解は Heun 関数と呼ばれる。Heun 関数を用いて Teukolsky 方程式の厳密解を構成した。ちょうど Mathematica 12.1 において Heun 関数が導入されたため、そのベンチマークも兼ねて、得られた厳密解から Kerr de Sitter ブラックホールの準固有振動数を数値的に計算し、これまでの結果を再現することを確認した。この Mathematica のコードを使うと、これまでの方法より短時間かつ高精度で計算できる点がメリットである。

(4) 3次元超対称ゲージ理論

3次元 $N=4$ ADHM 理論と呼ばれる超対称場の量子論の相関関数の研究を開始した。この理論に超対称局所化と呼ばれる方法を適用することで、ある種の相関関数を行列積分の形で厳密に書き下すことが出来る。この局所化公式を利用することで、ゲージ群のランクが大きくなる極限、いわゆるラージ N 極限での相関関数の振る舞いがどうなるのかを詳しく解析した。

(5) まとめ

当初は 2次元電子系のスペクトルの非摂動補正などを主な研究対象としていたが、その後ブラックホールの摂動論と超対称ゲージ理論との対応関係を発見したため、それを詳細に解析した。その結果回転ブラックホールの準固有振動モードの固有値問題が 4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論の Nekrasov 分配関数の特殊な極限を用いて解くことができることがわかった。ブラックホールの準固有振動モードは連星ブラックホールの合体における最終段階で放出される重力波と関係していることが期待されるため、この成果は超対称性を持つ場の量子論の現実的な応用例を示しており、多くの研究者の興味を引きその後の多くの関連研究の元になった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki	4. 巻 53
2. 論文標題 An alternative to the Teukolsky equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 General Relativity and Gravitation	6. 最初と最後の頁 93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10714-021-02866-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki, Kimura Masashi	4. 巻 7
2. 論文標題 Spectral Problems for Quasinormal Modes of Black Holes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Universe	6. 最初と最後の頁 476
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/universe7120476	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki, Okazaki Tadashi	4. 巻 12
2. 論文標題 Fermi-gas correlators of ADHM theory and triality symmetry	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SciPost Physics	6. 最初と最後の頁 5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.21468/scipostphys.12.1.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki, Sugimoto Yuji	4. 巻 2020
2. 論文標題 Bloch electrons on honeycomb lattice and toric Calabi-Yau geometry	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP05(2020)026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki、Kimura Masashi	4. 巻 102
2. 論文標題 Semi-analytic expressions for quasinormal modes of slowly rotating Kerr black holes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review D	6. 最初と最後の頁 4
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevD.102.044032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki	4. 巻 38
2. 論文標題 Quasinormal modes of Kerr-de Sitter black holes via the Heun function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Classical and Quantum Gravity	6. 最初と最後の頁 025015 ~ 025015
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6382/abc82e	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki	4. 巻 101
2. 論文標題 Quasinormal modes of black holes and Borel summation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review D	6. 最初と最後の頁 24008
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevD.101.024008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Duan Zhihao, Gu Jie, Hatsuda Yasuyuki, Sulejmanpasic Tin	4. 巻 2019
2. 論文標題 Instantons in the Hofstadter butterfly: difference equation, resurgence and quantum mirror curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 79-124
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP01(2019)079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hatsuda Yasuyuki、Sciarappa Antonio、Zakany Szabolcs	4. 巻 2018
2. 論文標題 Exact quantization conditions for the elliptic Ruijsenaars-Schneider model	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 118-183
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP11(2018)118	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計5件(うち招待講演 2件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Yasuyuki Hatsuda
2. 発表標題 Black Hole Perturbation Theory and Seiberg-Witten Theory
3. 学会等名 XI Workshop on Geometric Correspondences of Gauge Theories (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 初田泰之
2. 発表標題 八ニカム格子上の電子とカラビ・ヤウ幾何学
3. 学会等名 日本物理学会2019年秋季大会(素宇)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 初田泰之
2. 発表標題 摂動論に基づくブラックホール準固有振動の解析
3. 学会等名 日本物理学会第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 初田泰之
2. 発表標題 磁場中の2次元電子系におけるインスタントン効果
3. 学会等名 日本物理学会2018年秋季大会（素宇）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yasuyuki Hatsuda
2. 発表標題 Instantons in the Hofstadter butterfly
3. 学会等名 7th International Conference on New Frontiers in Physics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------