

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K04151

研究課題名（和文）数理工的手法を用いた非線形システムの大域的求解法に関する研究

研究課題名（英文）Study on globally convergent algorithms for solving nonlinear systems using mathematical techniques

研究代表者

山村 清隆（Yamamura, Kiyotaka）

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：30182603

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：大規模集積回路をはじめとする非線形システムの解析問題は科学技術における重要かつ難しい問題の一つで、現在でも「解に収束しない」「効率的な解法が存在しない」「実用化が難しい」などの困難が生じている。本研究では、非線形システムの解析問題の中でも特に難しいとされる「解に収束することが理論的に保証された解法」「すべての解を確実に求めることができる解法」などの大域的求解法分野を対象に、数理工的手法（ホモトピー法、線形計画法、整数計画法など）を用いた非線形システムの“効率的で実用的な”大域的求解法の開発を行った。また「連続系の全解探索問題」に「離散系の最適化ソルバー」を適用するという新しい方法論を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

大規模集積回路をはじめとする非線形システムの解析問題は科学技術における重要かつ難しい問題の一つで、現在でも「解に収束しない」「効率的な解法が存在しない」「実用化が難しい」などの困難が生じている。本研究では、非線形システムの解析問題の中でも特に難しいとされる「解に収束することが理論的に保証された解法」「すべての解を確実に求めることができる解法」などの大域的求解法分野を対象に、数理工的手法（ホモトピー法、線形計画法、整数計画法など）を用いた非線形システムの“効率的で実用的な”大域的求解法の開発を行い、集積回路設計、ニューラルネットワーク、AIなどの分野の発展に貢献した。

研究成果の概要（英文）： In this project, we developed efficient and globally-convergent algorithms for solving large-scale nonlinear circuits and systems. We first proposed an efficient homotopy method for solving nonlinear circuits, and proved its global convergence property. By this method, bipolar analog integrated circuits with more than 20,000 elements could be solved with the theoretical guarantee of global convergence. We next proposed an efficient algorithm for finding all solutions of nonlinear circuits using linear programming. By this algorithm, all solutions of large-scale systems where the number of variables is several thousands could be found in practical computation time. We further proposed an efficient method for finding all solution sets of nonlinear circuits using integer programming. By this method, complete analysis of nonlinear circuits can be performed easily without making complicated programs. These algorithms are excellent at both efficiency and practicality.

研究分野：工学

キーワード：非線形理論・回路 非線形数値解析 大規模集積回路 全解探索 数理工手法 整数計画法 ホモトピー法 区間解析

1. 研究開始当初の背景

大規模集積回路をはじめとする非線形システムの解析問題は科学技術における重要かつ本質的に難しい問題の一つで、現在でも「解に収束しない」「効率的な解法が存在しない」「実用化が難しい」などの困難が生じている。特に「解に収束することが理論的に保証されたアルゴリズム」「すべての解を確実に求めることができるアルゴリズム」といったいわゆる大域的求解法の分野では、その重要性にもかかわらず未解決のまま残されている課題が多く存在していた。

2. 研究の目的

本研究では、非線形システムの解析問題の中でも特に難しいとされる「解に収束することが理論的に保証された解法」「すべての解を確実に求めることができる解法」などの大域的求解法の分野を対象に、数的手法(ホモトピー法、線形計画法、整数計画法など)を用いた非線形システムの「効率的で実用的な」大域的求解法の開発を行うことを目的とする。また「連続系の全解探索問題」に「離散系の最適化ソルバー」を適用するという新しい方法論を確立し、これまで専用ソルバーが存在しなかったいくつかの問題に対して優れたソルバーを与えることを目的とする。

3. 研究の方法

本研究では、中心となる研究テーマとして

- (1) ホモトピー法を用いた非線形回路の大域的求解法に関する研究
- (2) 線形計画法を用いた非線形回路のすべての解を求めるアルゴリズムに関する研究
- (3) 整数計画法を用いた非線形回路のすべての解を求めるアルゴリズムに関する研究

の三つを選定し、これらを中心とする研究を(周辺分野の調査も含めて)互いに補完しながら同時進行することにより、非線形システムの「効率的で実用的な」大域的求解法の開発を行う。なおここで「解」とは、点、曲線、曲面、連結されていない非凸多面体の集合など、様々な形状のものを対象とする。また既存のソフトウェアを用いてこれらの問題を簡単に解く手法を考案することにより、これらのアルゴリズムの計算効率と実用性を向上させる。最終的には、「非線形システムを効率良く解くための本質とは何か」を独自の視点から追求する。

4. 研究成果

以下、本研究で得られた主要な成果を、上記(1),(2),(3)のテーマ順に記す。

(1) ホモトピー法を用いた非線形回路の大域的求解法に関する研究

大規模集積回路の設計では回路シミュレーション、すなわち回路を記述する非線形方程式をコンピュータで解き動作確認を行うことが中心的作業の一つとなる。著者らはこれまで、回路シミュレーションにおけるニュートン法の非収束問題を理論面・実用面の両方から解決する方法として、ホモトピー法に関する研究を行ってきた。また企業との共同研究により、最も解析が困難とされるバイポーラアナログ回路に対して、その最大級である2万素子クラスのアナログLSIを世界で初めて収束の保証付きで解くことに成功し、このクラスのLSIの業界に先駆けた製品化や民生機器の高度化・低価格化に貢献した(図1)。本技術を適用して設計・開発・製造されたバイポーラアナログLSIの生産金額は開発当時で年間約800億円、生産数量は年間10億個以上となっている。

本研究ではまず、欧米で多用されている「可変利得ホモトピー法」の計算効率を大幅に改良した新しいホモトピー法を提案し、その大域的収束性を証明するとともに、回路シミュレータSPICEへのインプリメンテーションを容易にする方法を提案した。ここでインプリメンテーションを容易にする方法とは、「式を回路で記述する」という逆転的発想に基づく“SPICE指向型解析法”と呼ばれるもので、著者らが考案したオリジナルの方法である。この方法を用いれば、最新のホモトピー法を、複雑なプログラミングを行うことなく、誰でも簡単に実装することが可能となる。

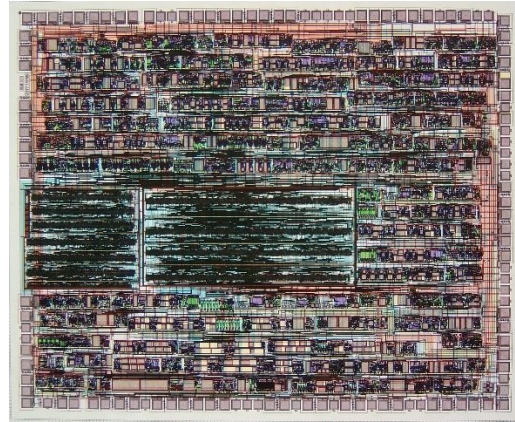


図1 本研究で開発された世界最大級のアナログLSIとそのレイアウト図

また n 式 $n+1$ 変数の非線形方程式の解曲線を追跡することは、理工学上の諸方面で現れる基本的かつ重要な問題で、集積回路設計でもホモトピー法におけるパス追跡や非線形回路の特性曲線解析において重要となる。代表的な解曲線追跡法として予測子修正子法が知られている。しかしこの方法は解曲線追跡の過程で「他の解曲線に乗り移る」「同じ解曲線の別な所に乗り移る」という現象が生じることが古くから知られており、いまだ解決されていない予測子修正子法の本質的問題とされている。

本研究では、予測子修正子法における「解曲線の乗り移り現象」の発生頻度を減らすための実用的な方法、すなわち「理論的な裏づけがあるとともに」「実用性があり」「大規模問題にも適用できる」方法を提案し、その有効性について検証した。本手法は予測子修正子法の計算過程で現れる数値の符号を調べるだけなので、追加の計算量がほとんどゼロで、大規模問題にも適用できる。

(2) 線形計画法を用いた非線形回路のすべての解を求めるアルゴリズムに関する研究

非線形回路（あるいは一般的な非線形方程式）のすべての解（直流動作点、特性曲線など様々な形状のもの）を求める効率的なアルゴリズムを確立することは、高機能で信頼性の高い集積回路を作る上で重要となる。しかしこの問題はNP完全であるため、実用規模の回路に対して全解探索を行うことは不可能とされていた。著者はこの問題に対し、線形計画法を用いた多くの効率的なアルゴリズムを提案してきた。この方法は Microsoft Excel にも組み込まれていることが *Reliable Computing*, vol.9, no.2, pp.143-159 で紹介されている

本研究で開発した方法は、LP テストと呼ばれる「与えられた領域内に解が存在しないことを線形計画法を用いて判定する方法」に基づくものである。これまでのLPテストを用いた全解探索法では、非線形関数を長方形もしくは直角三角形で囲むことにより非線形方程式を線形計画問題に変換したが、本研究では、平行四辺形や接線三角形を用いたより効率的な全解探索法を提案した。また「平行四辺形は斜交座標系で長方形になる」ことに着目した独自の変数変換法を導入することにより、アルゴリズムの計算効率を飛躍的に改善できることを示した。最終的には、5,000 素子クラスの非線形回路の全解探索に成功した。

更に本研究では、斜交座標系という観点からこの10年間に行ったLPテストに関する研究を統合し発展させる論文を完成し、国際的に権威のある学術論文誌 *Journal of Computational and Applied Mathematics* に投稿し、採録となった。

(3) 整数計画法を用いた非線形回路のすべての解を求めるアルゴリズムに関する研究

本研究は37年間にわたる科研費の継続的な補助のもと、相応の成果をあげることができたが、比較的最近の研究で整数計画法を用いるアイデア（連続系の全解探索問題を離散系の最適化ソルバーで解くアイデア）を発見したことで、「連続」と「離散」を統一的な枠組みで解釈することが可能となり、本研究は新しいステージに向かって進み始めている。

非線形回路の解析では、非常に複雑な形状の解集合をもつ回路を扱うことがある。例えば特性曲線が多角形などの有界平面を含む回路や、解が連結されていない非凸多面体の集合となる回路などである。このような回路のすべての解を求めることを完全解析と呼ぶ。本研究では、近年

の整数計画法の驚異的な発展に着目し、整数計画ソルバー-CPLEX を用いて整数計画問題を 2 回解くだけで完全解析を行うことのできる新しい方法を提案した。またこれにより「連続系の全解探索問題」に「離散系の最適化ソルバー」を適用するという新しい方法論を確立し、これまで専用ソルバーが存在しなかった問題に対して優れたソルバーを与えた。

また上記の方法を拡張することにより、整数計画法を用いた区分的線形区間方程式 (PLI 方程式) のすべての解を求めるアルゴリズムに関する研究へと発展させた。この方法も複雑なプログラミングを必要としないため実装が容易で、かつ効率が良く、世界的規模の「精度保証付き数値計算」の研究者グループに大きなインパクトを与えた。またこの成果をまとめた論文を国際的に権威のある学術論文誌 Journal of Computational and Applied Mathematics に投稿し、採録となった。

以上の研究により、大規模集積回路をはじめとする様々な非線形システムに対する効率的で実用的な大域的求解法を開発することに成功し、研究開始当初に設定した研究目標はほぼ達成することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kiyotaka Yamamura	4. 巻 382
2. 論文標題 An efficient algorithm for finding all solutions of nonlinear equations using parallelogram LP test	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 113080
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2020.113080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kiyotaka Yamamura	4. 巻 372
2. 論文標題 Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using an integer programming solver	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 112616
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2019.112616	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takumi Kuramoto and Kiyotaka Yamamura	4. 巻 1
2. 論文標題 An efficient method for finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using integer programming	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of 2019 IEEE Asia Pacific Conference on Postgraduate Research in Microelectronics and Electronics (PrimeAsia)	6. 最初と最後の頁 41-44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/PrimeAsia47521.2019.8950733	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takumi Kuramoto and Kiyotaka Yamamura	4. 巻 1
2. 論文標題 Finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using an integer programming solver	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of 2019 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks	6. 最初と最後の頁 79-82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kiyotaka Yamamura	4. 巻 1
2. 論文標題 Finding all solution sets of piecewise-linear interval equations using an integer programming solver	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Book of Abstracts, SCAN2018 (The 18th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations)	6. 最初と最後の頁 36-37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kiyotaka Yamamura and Takumi Shimada	4. 巻 1
2. 論文標題 An efficient variable-gain homotopy method for finding DC operating points of transistor circuits	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of 2018 IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems	6. 最初と最後の頁 235-238
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/APCCAS.2018.8605634	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kiyotaka Yamamura and Hiroki Takahara	4. 巻 1
2. 論文標題 Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using triangular LP test	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of 2018 IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems	6. 最初と最後の頁 243-246
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/APCCAS.2018.8605636	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kiyotaka Yamamura and Hiroki Takahara	4. 巻 1
2. 論文標題 Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using rectangular and triangular LP tests	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of 2018 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks	6. 最初と最後の頁 62-65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kiyotaka Yamamura and Yuichiro Takane	4. 巻 1
2. 論文標題 An efficient method for finding all characteristic curves of piecewise-linear resistive circuits using integer programming	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of 2018 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks	6. 最初と最後の頁 66-69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 山村清隆
2. 発表標題 ホモトピー法への感謝, すべての解への憧れ
3. 学会等名 2019年電子情報通信学会総合大会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------