

令和 4 年 5 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K11155

研究課題名（和文）代数方程式系の解空間に対する組合せ的分析手法の開発

研究課題名（英文）Combinatorial analysis of the solution spaces of systems of polynomial equations

研究代表者

谷川 眞一（Shinichi, Tanigawa）

東京大学・大学院情報理工学系研究科・准教授

研究者番号：30623540

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：代数方程式系の解の有限性判定や数え上げなどの基礎的問題に対し、系に潜む離散構造に着目した組合せ論的な解析手法を考察した。特に、グラフ剛性やスプライン設計問題などの工学分野に現れるグラフに関連付けられた代数方程式系に対し、その解空間の次元や解の唯一性が、グラフ理論的性質で特徴づけ可能であることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

極大抽象剛性マトロイドの組合せ的階数関数の導出は、1991年にGraverによって抽象剛性マトロイドの概念を導出されて以降、グラフ剛性の文脈では重要な未解決問題であった。本研究でこの問題を解決できたことは特に学術的意義の大きい成果である。今回開発したCrapoのマトロイド構築法と閉路連鎖を利用した組合せ的階数関数公式の関係は、より一般の多項式系の解空間の次元解析に展開可能であるが、その際の理論保証が課題として残っている状況である。今後この点を解決することで、より広範囲の代数方程式系に対する組合せ論的数理基盤の展開が期待できる。

研究成果の概要（英文）：In this project, we examined the impact of underlying combinatorics in the solution spaces of systems of polynomial equations. Focusing on polynomial systems in graph rigidity or spline analysis, we showed combinatorial characterizations of the dimension and the uniqueness of solution spaces.

研究分野：離散数学

キーワード：グラフ マトロイド グラフ剛性 スプライン

1. 研究開始当初の背景

多変数代数方程式系の解空間の解析は、数学における最も基本的な問いの一つであり、現代の数理科学研究のあらゆる場面で見られる話題である。線形方程式系への解法が数理的手法の基礎を担っている一方で、非線形方程式系の計算困難性はロボットの動線計画や次世代暗号設計などの解決が待たれる重要研究課題の困難性の一側面であり、代数方程式系に対する解法の進展は様々な分野へ大きな影響を与えている。しかしながら代数方程式系への一般解法の設計には限界があるため、特定の問題群の構造を巧く利用し、効率性や精度の向上を図る研究が盛んである。このような背景から、汎用性・効率性・精度(最適性)の評価尺度において、より良い解法の開発が推し進められており、既存手法の限界を打ち破る新しいアイデアが求められている。

2. 研究の目的

本研究では、代数方程式系の解の有限性判定や数え上げなどの基礎的問題に対し、系に潜む離散構造に着目した組合せ論的な解析手法の提案が目的である。代数方程式系の解空間に対し、離散構造が与える影響を明らかにすることで、特定の問題群に現れる組合せ構造の利活用に向けた、組合せ論的数理基盤の構築を目指す。

本研究では特に、グラフ剛性やスプライン設計問題などの工学分野に現れる、グラフに関連付けられた代数方程式系を主要な具体例として取り扱う。これらの工学分野に現れる代数方程式系の諸性質を効率的に判定可能なグラフ理論的性質として特徴づけることによって、頑健で効率的な組合せ的アルゴリズムの開発を行う。

3. 研究の方法

具体的な研究方針として、代数方程式系の解の有限性と解の唯一性の二つの性質に焦点をあて、解空間の離散構造に着目した解析手法と効率的なアルゴリズムの設計を目指す。多項式系の解空間の有限性は、一定の仮定のもとにおいて、対応する多様体の一般の点における接空間の次元を調べることで判定可能である。このことから解空間の有限性判定問題は不定元を含む行列の階数を求める問題へ帰着される。この不定元を含む行列の階数計算に対する決定的多項式時間アルゴリズムの設計は理論情報学における重要な未解決問題であり、離散最適化の視点からも室田やLovaszらによってマトロイドや劣モジュラ性を利用した解析手法が提案されている。これらの既存研究の技術を基盤に、多項式系の次元解析や唯一性の解析を行う。

より具体的に、本研究での主要な研究対象であるグラフのユークリッド空間への埋め込み問題(指定された二点間の距離を制約とする頂点配置を求める問題)では、グラフに付随する二次の多項式系の求解問題の解析を行う。その多項式系の解空間の一般の点における接空間は、不定元を含む行列によって表現でき、その行列の階数によって定まる剛性マトロイドを解析することで、元の二次多項式系の解空間の性質を解析することが可能である。このような代数的に定まるマトロイドを組合せ的に理解することが、本研究のアプローチである。

4. 研究成果

(1) 3次元極大抽象剛性マトロイドの階数の特徴づけ

3次元剛性マトロイドの組合せ特徴づけ問題は、グラフ剛性の文脈において最も重要な未

解決問題である．この問題の1つのアプローチとして，Graverによって抽象剛性マトロイドと呼ばれるマトロイドの族が定義され，抽象剛性マトロイド族の極大元として3次元剛性マトロイドの理解・解析を行う試みが提案された．本研究ではCrapoによって提案されたマトロイド構築法によって，指定された閉路族を含むマトロイドで極大なものが構築可能であることを示し，極大抽象剛性マトロイドを陽に構築するための組合せ的アルゴリズムの設計を行った．さらにその構築法に誘発される閉路連鎖を利用した組合せ的階数関数公式を導出し，極大抽象剛性マトロイドの独立性判定問題がNPかつcoNPに属することを証明した．さらに組合せ的階数関数公式を利用して，Lovasz-Yeminiによる連結度に関する剛性十分条件予想が極大抽象剛性マトロイドに対して成立することを確認した．

(2) 多変数区分的多項式関数空間の次元に関するWhiteley予想の解決

多変数の区分的多項式関数空間の次元を組合せ的に解析した．2次元の一般的単体的複体上の n 回微分可能なスプラインを考えた場合，その関数空間の次元は複体のグラフ構造のみに依存していることが知られている．この次元を利用して，複体の辺集合上のマトロイドを定義することが出来る．このマトロイドはcofactorマトロイドと呼ばれ，極大抽象剛性マトロイド族の中でマトロイド弱順序の意味で唯一の極大元であることがWhiteleyによって予想されていた．本研究では，Whiteleyによるdouble V-replacement予想と呼ばれるcofactorマトロイド上の操作に関する予想を解決し，その系として $n=1$ の場合，Whiteleyによるcofactorマトロイドと極大抽象剛性マトロイドの等価性予想が成立することを証明した．また，本結果の系として，Graverによる極大抽象剛性マトロイドの唯一性予想を肯定的に解決した．

(3) マトロイド弱順序における極大元の解析

スプライン空間におけるcofactorマトロイドおよび極大抽象剛性マトロイドの解析の一般化・抽象化に取り組んだ．グラフ上の極大マトロイド構築問題を導入し，極値組合せ論で盛んに研究がなされているweakly saturated sequenceや，マトロイド理論におけるfree elevationの道具を利用することで，いくつかの基本的な例に対する具体的な極大マトロイドの構成方法を提案し，一般的に極大マトロイドが一意に定まるための予想を提起した．

(4) ランダムグラフの大域剛性

Erdos-Renyiモデルを一般化した，ランダム部分グラフモデルにおけるグラフの大域剛性問題に取り組んだ．この問題はある種の確率モデルにおける，多項式系の解の唯一性に関する問いである．組合せ的特徴づけに基づく組合せ論的解析手法が知られていたが，この手法は2次元大域剛性の場合にのみ適用可能であった．本研究ではランダム行列理論を利用した一般次元での解析方法を提案し，幾つかの基本的なグラフに対し漸近的に最適な解析結果が得られることを証明した．

(5) テンセグリティの普遍剛性の特徴づけ

テンセグリティの配置空間は，半代数的な系の解空間の一例として重要である．その解の一意性を特徴付けることは困難な課題であるが，一意性の十分条件がConnollyによって示されている．このConnollyの十分条件が，次元緩和の設定において必要条件になることを証明した．さらに実数体上での表現論を利用した半正定値計画問題のブロック対角化手法

を利用して、対称性を有するテンセグリティに結果を拡張した。

(6) 単体的多様体の大域剛性

単体分割された多様体の局所的構造(各面の形状)から、多様体の全体の幾何的实现の決定可能性を考察した。この問題は多様体が2次元球面の場合においても、多面体の剛性問題として古くから研究がなされている。特にConnellyによる柔な多面体の構成が有名であるが、Gluckによって一般的な点配置の多面体は必ず剛であることが示されており、さらにFogelsangerによってGluckの定理の一般次元多様体への拡張が知られている。Fogelsangerの定理は、単体分割された多様体が連続的な変形に対し剛であることを意味している。本研究では、連続変形だけでなく、多様体全体の大域的な幾何实现の唯一性が成立するための組合せ的特徴づけの導出に成功した。

(7) 階乗グラフの大域剛性

グラフの階乗操作と大域剛性(グラフに付随する二次多項式系の解空間の唯一性)の関係を考察した。階乗グラフの剛性解析は、タンパク質の挙動解析やセンサーネットワークの配置同定などにおいて以前から考察されている話題であるが、その大域剛性は十分に理解されていない。研究の動機となったCheungとWhiteleyによる階乗グラフの大域剛性予想に関して、簡単な特殊ケースの証明を行なった。また応用上重要である2乗グラフの3次元大域剛性の解析を行い、大域剛性の必要条件の導出を行なった。さらに2乗グラフの大域剛性問題の解決に向け、2011年に加藤氏との共同研究で示した分子剛性定理の別証明を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 8件/うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 James Cruickshank, Bill Jackson, Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Global rigidity of triangulated manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv:2204.02503	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 James Cruickshank, Bill Jackson, Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Vertex splitting, coincident realisations and global rigidity of braced triangulations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete and Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Tibor Jordan and Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 155
2. 論文標題 Globally rigid powers of graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series B	6. 最初と最後の頁 111-140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jctb.2022.02.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Bill Jackson and Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Maximal matroids in weak order posets	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv:2102.09901	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Tibor Jordan and Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Rigidity of random subgraphs and eigenvalues of stiffness matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ryoshun Oba and Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Characterizing the Universal Rigidity of Generic Tensegrities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-021-01730-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Bill Jackson, Anthony Nixon, and Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 to appear
2. 論文標題 An improved bound for the rigidity of linearly constrained frameworks	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Katie Clinch, Bill Jackson, Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Abstract 3-Rigidity and Bivariate C12-Splines I: Whiteley's Maximality Conjecture	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.19086/da.34691	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Katie Clinch, Bill Jackson, Shin-ichi Tanigawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Abstract 3-Rigidity and Bivariate C12-Splines II: Combinatorial Characterization	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.19086/da.34692	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Shin-ichi Tanigawa
2. 発表標題 Abstract 3-Rigidity and Bivariate Splines
3. 学会等名 SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry (AG21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shin-ichi Tanigawa
2. 発表標題 The unique maximality conjecture and combinatorial characterizations for graph rigidity
3. 学会等名 Workshop on Progress and Open Problems in Rigidity Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shin-ichi Tanigawa
2. 発表標題 Rigidity of random subgraphs: Workshop on Circle Packings and Geometric Rigidity
3. 学会等名 The Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大場 亮俊
2. 発表標題 周期グラフのd-実現可能性の特徴づけ
3. 学会等名 日本応用数理学会 研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 荒川 侑馬
2. 発表標題 ランダム部分グラフモデルにおける巨大剛体成分の解析
3. 学会等名 日本応用数理学会 研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大場 亮俊
2. 発表標題 群対称テンセグリティの普遍剛性
3. 学会等名 日本応用数理学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 谷川眞一
2. 発表標題 グラフ上の極大Ktマトロイド予想
3. 学会等名 日本応用数理学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shin-ichi Tanigawa
2. 発表標題 Finding Auxetic Mechanisms
3. 学会等名 Geometric constraint systems: rigidity, flexibility and applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷川真一
2. 発表標題 極大抽象剛性マトロイドの特徴付け
3. 学会等名 JCCA-2019 離散数学とその応用研究集会 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin-ichi Tanigawa
2. 発表標題 Abstract 3-rigidity and Bivariate C21-splines
3. 学会等名 Rigidity and flexibility of microstructures (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
アイルランド	NUI Galway			
英国	Lancaster University	Queen Mary University of London		
ハンガリー	Eotvos Lorand University			