

令和 5 年 6 月 11 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K11165

研究課題名（和文）プログラム意味論の量子化・高次元化・幾何化

研究課題名（英文）Quantization, Categorification and Geometrization of Program Semantics

研究代表者

長谷川 真人（Hasegawa, Masahito）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50293973

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：プログラミング言語実装モデルの幾何的な側面に着目し、低レベル・超低レベルの実装モデルに対応できる幾何的なプログラム意味論の構築を目指した。特に、変数の扱いに低レベルの幾何的な実装の情報を伴うブレイド付きラムダ計算の理論を構築し、その基礎となるコンビネータ代数と閉オペラッドの一般論を、コンビネータ代数から閉オペラッドを構成する手法を中心に展開した。同時に、これらの研究の圏論的な基盤となるトレース付きモノイダル圏について、ホップモノイドによるトレース構造の持ち上げを中心に、新しいモデルの構成方法を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究はプログラミング言語の理論の基礎付けに関するものであり、圏論や幾何学の新しい知見や技法をプログラム意味論に取り入れること、および必要となる圏論の整備の両方を目指したものである。本研究によりプログラミング言語設計やプログラム検証に用いることのできる数学的手法が拡充され、短期的には、このような幾何的アプローチに基づく理論研究の活性化・深化、また、長期的には、今後のソフトウェア開発・検証技術の発展に寄与することが期待される。

研究成果の概要（英文）：This study aimed at developing novel semantics of low-level implementations of programming languages via geometric and topological approaches. In particular, we introduced a braided lambda calculus in which permutations of variables are realized by braids carrying information on the low-level geometric implementation. We established the fundamental correspondence between the braided combinatory algebras and braided closed operads, and more generally the correspondence between planar combinatory algebras and planar closed operads, where the construction of operads from combinatory algebras plays the central role. We also investigated new constructions of traced monoidal categories, which give a categorical foundation of our approach, by studying Hopf monads which lift the trace.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：プログラミング言語 意味論 圏論 量子トポロジー テンソル圏 ラムダ計算

1. 研究開始当初の背景

(1) プログラミング言語の実装と圏論を用いたプログラム意味論

従来のプログラム意味論では、その関心の中心は、高水準プログラミング言語で記述されるようなプログラムの挙動の分析にあり、具体的な実装方法等の低水準の問題について議論することは中心的な課題とはみなされていない。これは、プログラムの意味は、プログラムの表す高水準の構造によって定まるべきであり、低水準の実装の詳細に左右されるべきではないという、プログラミング言語設計の大前提からみれば自然なことである。しかし、現実には、多くの高水準プログラミング言語が、抽象機械や中間コードへのコンパイル等、ある程度抽象化された低水準実装モデルを前提に設計されているため、高水準プログラミング言語のエンドユーザ(プログラマ)にとっても、実装モデルの適切な理解を持つことがしばしば要求される。古典的なプログラム意味論は、このような実装モデルを設計・分析するための有効な道具を提供できていない。

例えば、Haskellに代表される関数型プログラミング言語の意味論は、おおむね、名前呼びラムダ計算とその意味論に基づいているが、実際の言語実装を見ると、非効率な名前呼びラムダ計算の意味論は用いられず、STG機械等で実現された、計算資源を共有し計算結果を再利用する必要呼び評価方式を採用している。このような必要呼びを用いた実装を定式化し分析するための意味論は、既に1990年代からその重要性が認識され先駆的な研究もなされている。けれども、それらはほとんどが操作的・構文的なものであり、構文論に依存しない表示的意味論は現在も確立されていない。この問題に限らず、プログラミング言語実装の意味論の構築は、多くの研究者の努力にも関わらず、いまだに理論的にも実用的にも満足できるレベルには達しておらず、現在のプログラム意味論における重要な課題の一つである。

一方、圏論を用いたプログラム意味論は、抽象機械・中間言語など適度に抽象化された言語実装モデルと相性が良い。これは古くは圏論的抽象機械の研究、より最近ではゲーム意味論や相互作用の幾何などの研究に見られることである。研究代表者自身も、これまでに、プログラミング言語における計算資源の共有、相互作用、および再帰や継続などの制御構造の分析を行うためのプログラム意味論を、圏論、特にテンソル圏(モノイダル圏)を用いて構築し、プログラミング言語の型システムや等式理論の分析を行ってきたが、その多くは実装モデルと圏論的意味論の親和性に着目したものである(文献1)。

(2) プログラム意味論と量子トポロジー・代数トポロジー

テンソル圏等の圏論の枠組みは、もともと、純粋数学の代数学及び幾何学・トポロジーと密接に関連して発展してきた。2010年頃、代表者は、テンソル圏の枠組みを用いて、プログラム意味論と量子トポロジーの橋渡しとなるモデルを構築することに成功した(文献3,4)。具体的には、量子群の構成法のひとつである量子二重化を用いて、プログラム意味論で用いられている圏から、交差の順序を区別でき、かつ計算資源の共有や再帰プログラムの解釈もできるリボン圏を実際に構成した。この成果は、ロバストな量子計算の実現方式として盛んに研究されている位相的量子計算にも関係しており、提案者は、長期的に、位相的量子計算に対応するプログラム意味論(プログラム意味論の量子化)を構想し研究している。このアプローチもまた、位相的量子場の理論に基づく、2次元系における準粒子の挙動として定式化された、極端に低水準の言語実装モデルの意味論の研究と位置づけることができる。一見すると、これは、先に述べたプログラミング言語の実装の意味論とはかけ離れた話題に思われるが、上で述べた事例は、もともと必要呼び実装モデルで用いられる巡回共有データ構造のために代表者の学位論文(文献1)で構築した意味論を量子化したものであり、これらふたつの研究の流れは、共通の出発点から生じた兄弟関係にあるものである。技術的にも、共通する圏論的構造(テンソル圏、特にトレース付きモノイダル圏)を用いており、極めて親和性が高い。

さらに俯瞰的・長期的な視点に立つと、クライン以来の「種々の変換に対して不変な図形の

性質」を研究する幾何学と、「計算の実行過程において不変なプログラムの性質」を研究するプログラム意味論には、概念的な類似が多く見られる。ここに述べた背景は、それらの類似に理論的実体をもたらす大きな研究の流れの一部である。

2. 研究の目的

本研究では、テンソル圏・高次元圏の理論に基づき、量子トポロジー、代数トポロジーをはじめとする現代幾何学・トポロジーの概念を用いた、プログラム意味論の新しい大きな枠組みを目指す（プログラム意味論の幾何化）。そのための基礎理論の整備、およびプログラミング言語の実装レベルを対象とした意味論を与え、プログラム意味論の幾何化の有用性を明らかにする。

上述したように、プログラミング言語の実装・処理系を正確に捉え分析するための意味論は、すでに1990年代よりその重要性が認識されており、操作的な（構文的な）意味論についてはある程度整備がなされている（ただし初期の研究は正確さが疑われるものも含まれており、その基礎づけの見直しが研究代表者も含めた研究者らによって行われている（文献²））。しかし、有用な分析を行えるような適度に抽象化された（表示的な）意味論が研究されるようになったのは、必要となる圏論的な枠組みが整備された2000年代に入ってからである。

一方、プログラム意味論と量子トポロジーの関係は、上に述べたように、代表者が独自に発見し、研究を進めてきたものである。量子トポロジーはトポロジー・表現論・数理物理など広範な分野の膨大な研究から成り立っているが、その成果をプログラム意味論に応用する可能性を具体的に指摘したのは、代表者の研究がはじめてである。さらに、これらのふたつの研究方向をプログラミング言語実装の意味論として包括的に捉えるアプローチは、他に類を見ないものである。

また、実装レベルの意味論を幾何化することは、従来の高水準プログラミング言語の意味論を幾何化するよりも、技術的困難が少なく、明快な結果を得やすいと考えられる。高水準言語の複雑な制御構造・データ構造は、現時点では幾何的なアプローチで適切に扱うことが困難であると予想されるからである。したがって、言語実装レベルの意味論に着目して幾何化することには、少なくとも現状では技術的な必然性がある。

3. 研究の方法

(1) プログラム意味論の非可換化（非対称化）の可能性

プログラム意味論で用いるテンソル圏は、そのほとんどが対称的、すなわちデータの並び替えに対応する射が存在するものである。量子化においては、対称性は仮定できず、かわりにブレイド、すなわち交差する順序を考慮した並び替え操作に精密化される。ゆえに、量子化のためには、プログラム意味論を、対称性によらないかたちで展開する必要がある。以前の研究で、線型型理論における様相型「!」のモデル（線型冪余モナド）については、対称性を仮定しない定式化が可能であることを示した（文献⁵）。一方、トレースと（線形論理のモデルである）対称*-自律圏に関する以前の成果を非対称な場合に拡張できるかどうかはわかっていない（ごく特殊な場合には肯定的な結果を得ている）。このような、非可換化（非対称化）の可能性について取り組む。

(2) トレース付きモノイダル圏の基礎理論

トレース付きモノイダル圏の基礎理論の整備を進める。与えられたモノイダル圏があるトレース付きモノイダル圏に埋め込めるかどうかは、応用上重要な未解決問題である。この問題に、自由生成されたトレース付きモノイダル圏に着目し取り組んだ。また、適切な双対性を満たすテンソル圏がトレースを持つことはよく知られていたが、最近になり、ずっと弱い双対性からも同様にトレースを得られることがわかってきた。このアプローチから新しい量子化や実装モデルが得られる可能性を調べた。さらに、双対性を持ち上げるホップモナドがトレースを持ち上げるかどうかを調べることにより、新しいモデルを構成するための一般論を研究する。

(3) 相互作用の幾何との比較・融合

本研究に近いアプローチである相互作用の幾何との比較・融合に取り組む。

4. 研究成果

(1) プログラム実装の意味論および位相量子計算の意味論の両方の基礎となる、トレース演算子を持つモノイダル圏(テンソル圏)の基礎理論の研究を行った。特に、トレース付きモノイダル圏からコンパクト閉圏への埋め込みを与える Int 構成について、その埋め込み関手と別の関手の合成が右随伴を持つための必要十分条件を発見した。この結果を、トレース付きテンソル圏を用いた巡回共有構造を持つラムダ計算のモデルに適用することにより、古典線形論理のモデルを構成することができる。さらに、このモデル構成から、古典線型論理に対応する線形ラムダ計算から巡回ラムダ計算への、相互作用の幾何に類似した健全な翻訳が導かれる。この翻訳を定式化し、その非線型な部分の翻訳が、関数型プログラミング言語の実装に用いられる継続渡し方式(CPS)変換に一致することを示した。この成果を論文にまとめ、査読付き国際研究集会およびその論文集で発表した(文献7)。

(2) プログラム意味論の量子化の技術的基礎となる非可換(非対称)なモノイダル圏およびそれに基づく意味論の研究を行った。具体的には、古典線型論理の圏論的モデルとなる*-自律圏に関して、*-自律圏の構造がモナドの代数の圏に持ち上げられるための必要十分条件を、位相的量子場の理論・量子トポロジーと深く関連するホップモナドの概念を用いて与えた。この成果を論文にまとめ、査読付き国際学術誌に投稿し掲載された(文献6)。

(3) トレース付きモノイダル圏の構造を持ち上げるモナドの特徴づけについて、ホップモナドの概念を手掛かりに研究を進めた。ホップモナドがトレース付きテンソル圏の構造を持ち上げる必要十分条件を特定した。また、ホップモナドではないがトレースを持ち上げるようなモナドの具体例や、トレースを持ち上げないホップモナドの実例の構築に成功した。また、冪等なモナドがトレース構造を持ち上げる必要十分条件等を見出した。これらの成果を論文にまとめた(投稿中)。

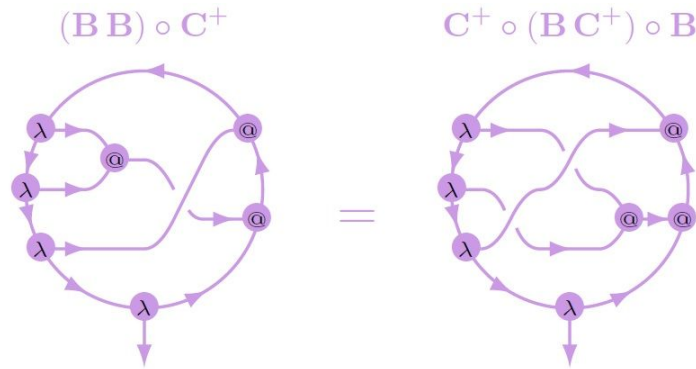
(4) プログラム実装の意味論および位相量子計算の意味論の両方に共通する基礎となる、ブレイド(組み紐)を持つラムダ計算の構文論と意味論を研究した。ブレイドはデータの順序の入れ替えの3次元空間における実装を表現しているとみなせる。ブレイドを持つ計算系・証明体系の研究は先例があるが、ラムダ計算としての定式化はこれがはじめてである。たとえば、関数の引数を入れ替える演算は、ブレイド付きラムダ計算では以下のような複数の実装を持つ。

$$C^+ = \lambda fxy. \left[\begin{array}{c} y \quad x \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \quad y \\ \hline f \quad f \end{array} \right] (f y x) \quad C^- = \lambda fxy. \left[\begin{array}{c} y \quad x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad y \\ \hline f \quad f \end{array} \right] (f y x)$$

ブレイド付きラムダ計算に対応するコンビネータ代数もあわせて導入し、関数合成をあらわすB、恒等関数をあらわすIと上で述べたC⁺、C⁻の4つのコンビネータを組み合わせることで、ブレイド付きラムダ計算のすべての項が生成できることを示した。このブレイド付きラムダ計算は型を持たないため、その意味論を与えることは量子トポロジーや位相的量子場の理論で用いられる圏(たとえば量子群の有限次元表現の圏)では困難である。この問題を、以前の研究で構成した交差G集合と適切な二項関係のなすりボン圏を用いることで解決し、具体的なモデルの例を与えた。これらの成果を国際研究集会で発表した。また、成果をまとめた論文を投稿し、査読を経て出版した(文献8)。

(5) 上述したブレイド付きラムダ計算に対応するコンビネータ代数の理論を、閉オペラッドの枠組みを用いて展開した。これにより、未解決だったブレイド付きコンビネータ代数の公理化と、ブレイド付きコンビネータ代数からブレイド付き閉オペラッドを普遍的に構成する手法を与えることができた。さらにそれを、平面コンビネータ代数から閉オペラッドを構築する一般論に拡

張した。以下に示すのは、ブレイド付きコンビネータ代数からブレイド付き閉オペラッドを構成する過程から抽出された公理の例である。この公理は結び目グラフの基本的な変形(ライデマイスター変形)に対応しており、幾何的に自然に正当化することができる。



これらの成果を論文にまとめ、査読付き国際会議で発表した(文献9)。

引用文献

- M. Hasegawa (1999) *Models of Sharing Graphs: A Categorical Semantics of let and letrec*. Distinguished Dissertation Series, Springer-Verlag.
- K. Nakata and M. Hasegawa (2009) *Small-step and big-step semantics for call-by-need*. Journal of Functional Programming 19(6):699-722.
- 長谷川真人 (2010) プログラム意味論とトポロジー 再帰・相互作用・結び目 . 日本数学会 2010年度秋季総合分科会企画特別講演アブストラクト, 37-49.
- M. Hasegawa (2012) *A quantum double construction in Rel*. Mathematical Structures in Computer Science 22(4):618-650.
- M. Hasegawa (2016) *Linear exponential comonads without symmetry*. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science 238:54-63.
- M. Hasegawa and J.-S. Lemay (2018) *Linear distributivity with negation, star-autonomy, and Hopf monads*. Theory and Applications of Categories 33(3):1145-1157.
- M. Hasegawa (2019) *From linear logic to cyclic sharing*. In Proc. Linearity-TLLA 2018, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science 292:31-42.
- M. Hasegawa (2021) *A braided lambda calculus*. In Proc. Linearity-TLLA 2020, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science 353:94-108.
- M. Hasegawa (2023) *The internal operads of combinatory algebras*. In Proc. 38th International Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics, Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science 1.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hasegawa Masahito	4. 巻 1
2. 論文標題 The Internal Operads of Combinatory Algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.46298/entics.10338	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Masahito	4. 巻 353
2. 論文標題 A Braided Lambda Calculus	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 94-108
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4204/EPTCS.353.5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Masahito	4. 巻 292
2. 論文標題 From Linear Logic to Cyclic Sharing	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 31~42
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4204/EPTCS.292.3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Masahito, Lemay Jean-Simon	4. 巻 33
2. 論文標題 Linear Distributivity With Negation, Star-Autonomy, and Hopf Monads	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Theory and Applications of Categories	6. 最初と最後の頁 1145-1157
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Masahito Hasegawa
2. 発表標題 The Internal Operads of Combinatory Algebras
3. 学会等名 International Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahito Hasegawa
2. 発表標題 The Internal Operads of Combinatory Algebras
3. 学会等名 理論計算機科学と圏論ワークショップ
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahito Hasegawa
2. 発表標題 A braided lambda calculus
3. 学会等名 Joint International Workshop on Linearity & Trends in Linear Logic and Applications (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masahito Hasegawa
2. 発表標題 Traced monoidal categories and semantics of computation
3. 学会等名 Macquarie University Department of Mathematics and Statistics Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長谷川真人
2. 発表標題 Lifting traced monoidal structure to the categories of algebras (work on progress)
3. 学会等名 第三十一回 代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 長谷川真人
2. 発表標題 A braided lambda calculus
3. 学会等名 第36回記号論理と情報科学 研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hasegawa Masahito
2. 発表標題 From Linear Logic to Cyclic Sharing
3. 学会等名 Joint International Workshop on Linearity & Trends in Linear Logic and Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 長谷川真人
2. 発表標題 From Linear Logic to Cyclic Sharing
3. 学会等名 第二十九回代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hasegawa Masahito
2. 発表標題 Semi-Duality in Monoidal Categories
3. 学会等名 Shonan Meeting on Diagrammatic Methods for Linear and Nonlinear Systems (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
英国	University of Oxford		