

令和 4 年 5 月 24 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K11170

研究課題名(和文) 強指数時間仮説の反証にむけた研究

研究課題名(英文) Studies toward disproving the strong exponential time hypothesis

研究代表者

脊戸 和寿 (Seto, Kazuhisa)

北海道大学・情報科学研究院・准教授

研究者番号：20584056

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：和積標準形論理式の充足可能性問題には、全探索よりも指数的に高速なアルゴリズムは存在しないという仮説を強指数時間仮説という。この仮説により、さまざまな問題のアルゴリズムの計算時間が現在知られる最良の値から理論的には改良できないことが示されている。本研究では、強指数時間仮説を将来的に否定するための基礎研究を行った。複数の計算モデル上の充足可能性問題に対するアルゴリズムを構築することで、それらの計算モデル上で表すことのできる和積標準形論理式の充足可能性問題は指数的に高速に解けることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現実世界のさまざまな問題が和積標準形論理式の充足可能性問題に定式化できることが知られている。そのため、この問題を高速に解くアルゴリズムを構築することは重要である。しかし、理論的には全探索よりも本質的に高速なアルゴリズムは存在しないという強指数時間仮説がある。本研究では、実際にアルゴリズムを設計することで、全探索よりも指数的に高速にとける一部の構造を示している。この結果により、強指数時間仮説を否定するためにはどのような構造をもつ問題を考える必要があるかも明らかにしている。

研究成果の概要(英文)：The Strong Exponential Time Hypothesis (SETH) states that for the satisfiability problem of conjunctive normal forms (CNFs), there is no algorithm exponentially faster than the brute-force search. If this hypothesis is true, we cannot improve the current best upper bounds of running time for many problems. In this research, to disprove SETH in the future, we investigated and studied on it. As a result, by developing satisfiability algorithms for some kinds of computational models including CNFs, we clarified some structures of CNFs whose satisfiability can be solved exponentially faster than the brute-force search.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：強指数時間仮説 充足可能性問題 厳密アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

理論計算機科学分野において、最も重要な未解決問題は P 対 NP 問題である。この問題はクレイ数学研究所により、リーマン予想や既に解決されたポワンカレ予想らとともにミレニアム懸賞金問題に指定されている。この問題を解決する研究の 1 つに充足可能性問題 (SAT) の研究がある。SAT とは、与えられた n 変数論理関数が 1 となる変数への割当が存在するかどうかを問うた問題である。SAT は有名な NP 完全問題の 1 つであり、この問題を解く多項式時間アルゴリズムは存在しないと予想されている。もし、この予想が正しいことを証明できれば、P 対 NP 問題を解決することができる。また、様々な実用上の問題を SAT に定式化可能なため、理論計算機科学分野だけではなく、人工知能やプログラム検証の分野でも SAT の研究は行われており、「The International Conferences on Theory and Applications of Satisfiability Testing」という SAT に関する様々な研究を扱った国際会議が、1996 年より開催されているほど重要な問題の 1 つである。

SAT には 2 つの大きな仮説が存在している。R. Impagliazzo と R. Paturi によって提唱された、指数時間仮説と強指数時間仮説である [1]。これらは SAT の中でも最も単純な形式である和積標準形論理式の SAT に関する仮説である。和積標準形論理式は、論理和の節を論理積でつないだ式のことをいう。各節に含まれる変数の数が高々、 k 個である和積標準形論理式を k -CNF とよび、 k -CNF の SAT を k -SAT とよぶ。 k に制限のない k -SAT のことを単に CNF SAT とよぶ。強指数時間仮説とは n 変数の CNF SAT には、 $2^{0.999n}$ 時間のように $c < 1$ の実数をもちいて 2^{cn} で表される時間で問題を解くアルゴリズムは存在しないという仮説である。しかし、 k が定数であれば、この仮説は成り立たない。なぜなら、 $k=3$ における $O(1.308^n)$ 時間アルゴリズムに代表されるような、 2^{cn} ($c < 1$) 時間アルゴリズムが知られている。指数時間仮説とは、3-SAT には、 2^n のように、 $2^{\{n^c\}}$ ($c < 1$) 時間アルゴリズムは存在しないという仮説である。

本研究では先に挙げた、強指数時間仮説についての研究を行う。強指数時間仮説は 2012 年に降盛んに研究されるようになり、Berkeley 大学の Simons Institute でのプログラム「Fine Grained Complexity and Algorithm Design」[2] でも取り上げられる重要なトピックとなった。その結果、これまで知られていなかった強指数時間仮説と多項式時間アルゴリズムとの強い関係性が明らかにされ始めた。特に、強指数時間仮説が既存の多項式時間アルゴリズムの改良困難性を示すという結果は衝撃的な結果であった。与えられた 2 つの文字列から最長の共通部分列を見つける Longest Common Subsequence 問題に対するアルゴリズムの計算時間が強指数時間仮説下では改良不可能なことが示される等 [3]、実用上重要な問題に対し理論上の計算限界を与えたことは革新的な結果であると考えられる。しかし、強指数時間仮説に対して懐疑的な研究者も多く、この仮説の成否を示すことは非常に重要な課題となっている。

[1] R. Impagliazzo and R. Paturi: On the Complexity of k -SAT. Journal of Computer and System Sciences, 62:367-375, 2001.

[2] Simons Institute for the Theory of Computing: Fine Grained Complexity and Algorithm Design, <https://simons.berkeley.edu/programs/complexity2015>, August 19 -December 18, 2015.

[3] A. Abboud, T. D. Hansen, V. V. Williams, and R. Williams: Simulating Branching Programs with Edit Distance and Friends: Or: A Polylog Shaved is a Lower Bound Made. Proceedings of the 48th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, pp.375-388, 2016.

2. 研究の目的

本研究の最終目標は強指数時間仮説を否定することである。その目標に向け本申請では、強指数時間仮説下での既存アルゴリズム改良の困難性の証明、様々な問題における強指数時間仮説と同等の仮説の構築、SAT に対するアルゴリズム構築の 3 つを柱として研究を行う。この 3 つの柱について詳細を記載する。

(1) 強指数時間仮説下での既存アルゴリズムの改良困難性の証明

先に挙げた Longest Common Subsequence 問題のように強指数時間仮説下で既存アルゴリズムの計算時間が改良困難な問題を示す。この目的は、既存アルゴリズムの改良が強

指数時間仮説の反証となるような問題を多くすることで反証への可能性を高くすることである。問題の候補が多くなれば、その問題を得意とする他の研究者の協力を仰ぐことができ、お互いの知見を融合することで反証へと近づくことができると考えられる。

- (2) 様々な問題における強指数時間仮説と同等の仮説の構築
強指数時間仮説は CNF-SAT に対しての仮説であるが、同等の仮説は他の問題でも考えられる。ある問題 A の計算時間を仮定することにより、他の問題 B の計算困難性を証明する様々な問題を発掘することが目的である。新たに構築する仮説が強指数時間仮説と全く関連のない仮説では本研究の主目標から外れるため、強指数時間仮説と強い関係をもつ仮説を構築することを主目的とする。
- (3) SAT に対するアルゴリズム構築
(1) および (2) は強指数時間仮説の否定に向けた様々なアプローチを可能とするための研究であるのに対し、(3) は否定に向けてアルゴリズムを構築することを目標とする。CNF-SAT でのアルゴリズム構築だけでなく、論理回路上の SAT, 分岐プログラム上の SAT アルゴリズム構築を行い、(2) と連動してどのような例題では強指数時間仮説を回避できるのかを明らかにし、既存アルゴリズムの計算時間のボトルネックとなっている構造等を明らかにしていく。これらの構造に対し、高速に必要な計算を行うアルゴリズムを構築することが、反証に向けて必要なタスクとなる。

3. 研究の方法

本研究は理論研究を中心であったため、まずは様々な文献の調査から始め、最新のアルゴリズム設計技法や解析手法等の習得をおこない、その上で目的に挙げた(1)～(3)の研究目的に沿った内容について研究を実施した。適宜、分担者と各技法や結果について議論を行いながら進めていった。2020年にはCovid-19により対面での議論ができなくなってしまい、オンライン中心での議論となった。国際会議や国内研究会の中止やオンラインでの実施への変更に伴い、計画の大幅変更を余儀なくされたが、必要な情報収集や分担者との議論および研究協力者との議論はできる限り実施した。

4. 研究成果

本研究により得られた3つの結果を査読付き雑誌論文に投稿し、採録された。目的で示した(1)、(2)の研究については論文採録に至る結果を得ることができなかった。

- (1) 対称素子を一定数含む定数段数論理回路に対する全探索よりも超多項式的に高速な充足可能性判定アルゴリズムの設計と当該回路における下界証明

素子に入力される1の個数のみで出力が決定する素子のことを対称素子という。入力制限のないAND素子、OR素子と単入力のNOT素子で構成される段数が定数である回路に入力制限のない対称素子を一定数加えた回路におけるSATに対する全探索よりも高速なアルゴリズムを設計した。この結果は2016年に国際会議に発表していたが、一部の結果に誤りがあったため、それを修正して、論文誌での採録に至った。この結果が指数的に高速なアルゴリズムに改良できれば、強指数時間仮説を否定できる結果となる。

- (2) k 回読み分岐プログラムに対する全探索より指数的に高速な充足可能性判定アルゴリズムの設計

k 回読み分岐プログラムとは、分岐プログラムの根から出力ノードに至る任意のパスについて、各変数がそれぞれ高々、k 回しか現れない分岐プログラムをいう。この分岐プログラム上の充足可能性問題に対してアルゴリズムを設計した。このアルゴリズムは Borodin, Razborov, Smolensky による k 回読み分岐プログラムの分解法を用いることで設計することができた。

- (3) 線形サイズ幅2分岐プログラムに対する全探索より指数的に高速な充足可能性判定アルゴリズムの設計

分岐プログラムのうち、根から同じ距離にあるノード数が高々2であるものを幅2分岐プログラムという。幅2分岐プログラムは和積標準形論理式よりも表現能力が強く、多項式サイズの和積標準形論理式で表現できないパリティ関数を線形サイズで表現することができる。この線形サイズの幅2分岐プログラム上の充足可能性問題に対して、全探索よりも指数的に高速なアルゴリズムを設計することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Atsuki Nagao, Kazuhisa Seto, and Junichi Teruyama	4. 巻 64
2. 論文標題 Satisfiability Algorithm for Syntactic Read-k-times Branching Programs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Theory of Computing Systems	6. 最初と最後の頁 1392-1407
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00224-020-09996-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki, and Junichi Teruyama	4. 巻 105
2. 論文標題 Bounded Depth Circuits with Weighted Symmetric Gates: Satisfiability, Lower Bounds and Compression	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Computer and System Sciences	6. 最初と最後の頁 87-103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jcss.2019.04.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomu MAKITA, Atsuki NAGAO, Tatsuki OKADA, Kazuhisa SETO, Junichi TERUYAMA	4. 巻 E105-A(9)
2. 論文標題 A Satisfiability Algorithm for Deterministic Width-2 Branching Programs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1587/transfun.2021EAP1120	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	長尾 篤樹 (Nagao Atsuki) (20802622)	お茶の水女子大学・基幹研究院・助教 (12611)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------