

令和 6 年 5 月 11 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K11182

研究課題名（和文）複雑ネットワークの支配問題に対するアルゴリズムの高度化と応用

研究課題名（英文）Advanced algorithm and its applications for the domination problem in complex networks

研究代表者

趙 亮（ZHAO, LIANG）

京都大学・総合生存学館・准教授

研究者番号：90344902

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、複雑ネットワークにおいて、適切な距離 k 支配集合のサイズ D とネットワークのサイズ A の間にアロメトリー $D \propto A^a$ ($a < 1$ は定数)が成立することを示し、この現象を説明する理論も与えた。応用として、社会ネットワークを用いて議会代表の数理モデルを構築し、適切な国会規模が人口の劣線形関係にある理論を提示した。さらに、平等な議席割当は人口の劣線形関係にあることを示し、そのための方法を開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的意義は、ある社会集団の過半数の構成員に影響することの簡単さを数理的に示し、それが議会規模と議席配分に与える影響を明らかにしたことである。社会的意義も大きいと考える。国会や議会は、民衆を平等に代表しなければならない。その状況が人類数世紀の努力によって大きく進展してきたが、本研究は、さらに一歩進んで、「議席数÷人口」で一人当たりの代表される度合いを求めてその値を同一にさせようとするこれまでの考え方の間違い（計算式が間違っていること）を指摘し、正しい方法論を与えた。これより、議席配分における真の不平等が明らかになり、社会平等の実現に貢献すると考える。

研究成果の概要（英文）：This research found an allometry law " $D \propto A^a$ " between the size D of an appropriate distance- k dominating set and the size A of the network for complex networks, where $a < 1$ is a constant. Moreover, it provides a theoretical model to explain this phenomenon. An application, it gives a mathematical model for representation in human society using social network and shows the optimal size of a parliament scales sublinearly to the population. As a result, it shows that the seats of a parliament shall be apportioned sublinearly to the population and develops methods for the apportionment.

研究分野：数理情報学

キーワード：複雑ネットワーク 支配集合 代表集合 アロメトリー 一票の格差

1. 研究開始当初の背景

節点集合 V と辺集合 E からなるグラフ $G = (V, E)$ が与えられたとする。任意の節点 v から k 本以下の辺を経由して到達できる節点の部分集合を $U_k(v)$ と書き、 v が $U_k(v)$ の節点を (距離 k で) 支配すると言う。応用によって制御や代表、影響するということもある。任意の k について、すべての節点を距離 k で支配できる支配節点集合のなかで節点数が最小となるものを求める問題は、最小距離 k 支配集合問題と呼ぶ。

この問題は、特に $k=1$ の場合は、半世紀前から研究されてきた有名な「支配問題」であり、理論的にも応用的にも重要な問題である (Haynes et al., 2020; Zhao 2016)。しかし、一般には NP 困難であるため、実用的に取り扱える問題の規模は、厳密解法ではせいぜい数百程度、欲張り法ではせいぜい数千程度になっている (Sasaki et al., 2008)。我々は、億単位の節点を持つ大規模な複雑ネットワークにも対応できる高速で高精度なヒューリスティックス・アルゴリズム Sieve や QuasiGreedy 等を開発してきた (Sasaki et al., 2008; Wang et al., 2009; Zhao et al., 2013)。これらの方法は現在でも世界最高の性能を持っている。

アルゴリズム開発の過程で、最小距離 k 支配集合のサイズ D が k の指数関数的に減少する現象 (Zhao et al., 2016) や、 D とネットワークの節点数 A との間に $D \sim A^a$ というアロメトリー法則 (a は A に依存しない定数) を確認した。前者は複雑ネットワークの持つスモールワールド性から容易に理解できるが、後者については、類似した先行研究がなく、普遍的な現象なのか不明であった。それを明らかにすることが本研究の着想であった。

2. 研究の目的

前述の背景から本研究は、(1) 最小距離 k 支配集合のサイズと複雑ネットワークの節点数のアロメトリー法則と、(2) その現象の理論的仕組み、(3) 応用を明らかにすることを目的とする。(3) の応用については、(複雑ネットワークの一つである) 社会ネットワークの構成員を適切に代表できる「代表集合」の大きさの検討にも適用できるのではないかと考える。具体的に、民衆の代表から成り立つ国会と議会を研究対象とする。

3. 研究の方法

(1) 最小距離 k 支配集合のサイズ D とネットワークの節点数 A のアロメトリー法則

D と A との間に $D \sim A^a$ というアロメトリー法則の普遍性を確認するために、実ネットワークと人為的に作成される複雑ネットワークを考察する。実ネットワークには、世界最大といわれるリポジトリ networkrepository.com から入手した 155 個のネットワークを用いる。人為的の複雑ネットワークは、よく使われる Barabasi-Albert モデルと Watts-Strogatz モデルの両方を用いて作成する。ネットワークの規模 (頂点数と枝数の合計値) は、数十から約 1.5 億である。 k の値は、1, 2, 3, 4 を考察する (5 を超えると 1 個だけの節点で全節点を支配できるから)。

なお、厳密に D を求めるのが難しいので、我々の開発したヒューリスティックスを改良して近似解を計算する。予備実験では、別のヒューリスティックスで双対問題 (距離 $2k+1$ の独立集合問題) を解いて下界も計算して、近似解 (上界) と下界のギャップから厳密解の範囲を得る。そのギャップは、定数倍程度の結果がほとんどだったので、近似解の精度がよいことがわかる。よって、得られた近似解とネットワークの節点数との対数回帰分析を行うと、アロメトリー法則が成立するかが確認できると考えられる。その結果は 4. 研究成果の節で述べる。

(2) (1) のアロメトリー法則の理論的仕組み

我々は、ネットワークにおける代表のピラミッド構造が (1) のアロメトリー法則を形成させる理論的仕組みだと考える。それを確かめるために、まず先行研究 (Zhao 2016) に従って「適切な代表数」を定義する。一つの節点で過半数の節点を支配できるような距離 k の最小値 k_d を独裁半径と呼ぶ。独裁半径は、多項式時間で求まる (Zhao 2016)。定義より、距離 $k^* = k_d - 1$ で過半数の節点を支配するには 2 つ以上の節点が必要となる。この距離 k^* のことを民主半径と呼び、最小距離 k^* 支配集合のサイズ D をこのグラフの (適切な) 代表数と定義する。

代表数 D と A の関係を考察する。複雑ネットワークのスモールワールド性と我々の計算機実験の結果から、 $k^* \sim \log(A)$ と仮定する。また、 A に依存しない定数 $c > 1$ が存在し、任意の節点集合 W 、 $|W| \leq A$ 、に対して、高い確率で $|U_k(v) \cap W| \geq |W|c^k$, $k = 0, 1, \dots, k^*$ が成り立つことと仮定する。この代表のピラミッド構造モデルは、代表力が一定の範囲内で社会的距離の

指数関数的に増えていくという仮定と、代表が互いに独立しているという効率性の仮定を含む。Taggepera'72 が国会の規模を研究したときに提案した社会動員理論に近い部分がある。高さ k^* で $A/2$ 以上（つまり過半数）の節点を支配（代表）できるピラミッド構造が存在するかを調査する。そのようなピラミッド構造が存在すれば、過半数の節点を代表できる距離 k^* 支配集合となり、そのサイズ D' を効率的な代表数 D の上界として用いて理論を構築できる。

(3) (2) の理論の応用

(2) の理論を用いて社会ネットワークを考察する。具体的に、まず (2) の理論に対して、定数の値を実在するソーシャルネットワークの実験結果などから推定する。それから、それらの値を用いて国会・議会の規模を推定し、実データとの整合性を考察する。

4. 研究成果

(1) 様々な複雑ネットワークに対して計算した結果、アロメトリー $D = A^a$ が得られた。ただし $a < 1$ は、ネットワークに依存しない (k には依存する) 定数である。興味深いのは、 $a < 1$ 、つまり、支配集合のサイズがネットワークの節点数の劣線形関係にあること。これは、社会的集団において意見の集約が効率よく行われ、その結果、集団の規模と比例する代表は必要ないことを示唆する。例えば、集団の規模が倍になっても代表の数は倍まで増やす必要なく、 $2^a (< 2)$ 倍を増やせばよいことを意味する。同様に、集団の規模が半分になった場合、代表の数は、半減する必要がなく、 $(1 - (1/2)^a) (< 1/2)$ だけ削除すればよいことになる。

(2) に関しては、代表のピラミッド構造の定義より、 $D = D' A^a, 0 < a < 1$ であることを証明した。このことは D と A のアロメトリー法則を裏付ける理論と考えられる。実際、実在するソーシャルネットワークの例を用いて調査した結果、過半数の節点を支配できるピラミッド構造の存在を確認した。支配半径 ($1/2$ 以上の節点を支配できる最小距離 k) が $\log(A)$ に比例するというスモールワールド性と、ダンパー数 (一人の人間が同時に保持できる社会的接触の上限が約 150 人程度という人類学の説) さらに複雑ネットワークにおけるピラミッド構造の存在を用いると、社会的ネットワークにおける上記のアロメトリーが理論的に成り立つことを説明できる。具体的な数値として、人口が 100 万人から 10 億人までの社会的ネットワークに対して、 $1/3 \leq a \leq 5/9$ の見積もり値が得られた。

(3) これまでの成果を応用し、適切な国会・議会議員定数とその割当について研究した。その結果、適切な国会・議会定数は、人口の劣線形関係にある (つまり、アロメトリーの係数 a が 1 より小さい) ことをデータ分析と理論分析の両方で発見した。特に $1/3 \leq a \leq 5/9$ の関係式が、国会の議員数 (実データ) に関する回帰分析の結果と一致する。そこで本研究は、人口 n と民主的代表的代表数 R との間に $R = 1/3 \times n^{2/5}$ の標準関係式を提唱し、これは世界初めて実データに合う数理モデルになっている (これまでの理論モデルでは $R = n^{1/3}$ または $n^{1/2}$ の結果しかなかったが、実データの回帰分析の結果では $R = n^{0.4}$ を示唆している) この結果を踏まえて、平等な議席配分は、これまで当たり前のように使われてきた (線形関係を想定した) 人口比例原則ではなく、人口の劣線形スケールにある議会規模に合うように一人当たりの重みを計算する PSI (Population Seat Index) 指標を提案し、それが同じとなるように席数を配分すべきことを指摘した。この成果に基づき、既存の比例議席配分法 (Adam 法など) を非線形議席配分法に拡張した。応用例として、欧州議会が採用している遞減比例に対して、平等な議席配分となるような方法を提案した。これらの成果は、口頭発表や査読付き国際会議、プリプリント、書籍、ウェブページに公表したほか、インパクトの高いジャーナルに論文を発表している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Liang Zhao, Tianyi Peng	4. 巻 1
2. 論文標題 An Allometric Scaling for the Number of Representative Nodes in Social Networks	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of NetSci-X 2020, Springer Proceedings in Complexity	6. 最初と最後の頁 49 ~ 59
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-38965-9_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Liang Zhao, Akiko Tanimoto, Wenruo Lyu	4. 巻 -
2. 論文標題 Standardizing Representation for Equality with a Population Seat Index	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Physics and Society (physics.soc-ph), arXiv	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.48550/arXiv.2212.14790	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Lyu Wenruo, Zhao Liang	4. 巻 11
2. 論文標題 Axioms and Divisor Methods for a Generalized Apportionment Problem with Relative Equality	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 3270 ~ 3270
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/math11153270	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 0件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Akiko Tanimoto, Wenruo, Lyu, Liang Zhao
2. 発表標題 Malapportionment and Evaluating the Inequality for Degressive Proportionment with Representativeness Index
3. 学会等名 The 22nd Conference of the International Federation of Operational Research Societies（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Lyu, Wenruo and Liang Zhao
2. 発表標題 A Social Network Based Model for the Size of the Parliament
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2020年春季研究発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 谷本明子、呂文若、趙亮
2. 発表標題 選挙区格差の再考 代表度指標の提案
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2020年春季研究発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 呂文若、趙亮
2. 発表標題 社会的ネットワークの観点から適切な国会議員定数を考える
3. 学会等名 日本OR学会2018年秋季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 趙亮、呂文若
2. 発表標題 適切な議員定数と一票の格差
3. 学会等名 日本応用数学会数理政治学研究会（静岡大学）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Wenruo Lyu, Liang Zhao
2. 発表標題 A Study on a Pyramid Structure in Social Networks
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2022年春季研究発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 趙亮
2. 発表標題 比例型社会指標のスケール不揃い問題
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2022年春季研究発表会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 趙亮、谷本明子、呂文若（編集：日本応用数理学会、大山 達雄）	4. 発行年 2022年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 23
3. 書名 選挙・投票・公共選択の数理（担当：第6章）	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>さらなる後継研究を推進するために、本研究で収集した様々なデータや分析用のツールやその結果などを下記のリポジトリに預けてオープンアクセスのライセンスで公開している。</p> <p>1. Zhao, Liang (2023). Parliament size and population (2021). figshare. Dataset. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.22086326.v2</p> <p>2. Zhao, Liang (2023). Unbiased ratio of seats to population (2023). figshare. Dataset. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.22144898.v1</p> <p>3. Zhao, Liang (2023). Tools for the unbiased ratio indicators project. figshare. Software. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.22178018.v1</p> <p>4. Zhao, Liang (2023). Unbiased per capita GDP and ranking (2021). figshare. Dataset. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.22144841.v3</p> <p>5. Tanimoto, Akiko; Zhao, Liang, 2023, "Subnational Legislatures", https://doi.org/10.7910/DVN/A3QGLL, Harvard Dataverse, V3, UNF:6:1nucS7sjomZlZjs7D72+Rw== [fileUNF]</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------