

令和 6 年 5 月 22 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K11203

研究課題名（和文）高次元マルチンゲール理論とその統計的応用

研究課題名（英文）Theory of high-dimensional martingales and its statistical applications

研究代表者

西山 陽一（Nishiyama, Yoichi）

早稲田大学・国際大学院・教授

研究者番号：90270412

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：長年の課題であった stochastic maximal inequality の証明を完遂した。stochastic maximal inequality とは有限個の局所マルチンゲールの絶対値の最大値過程を、原点を出発する1次元可予測増加過程と原点を出発する1次元局所マルチンゲールの和で抑える不等式である。応用として、Doobの不等式およびLenglart不等式を、任意の有限次元にまで拡張することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高次元統計学の昨今の潮流としては、オラクル不等式を証明したと呼称しても、実際には「確率 ϵ 以上で以下の不等式が成立」といった主張をされる場合が殆どである。すなわち、切り取られた部分については何の情報も提供していない。

それに対し、本研究で得られた stochastic maximal inequality は、切り取りの要素を全く含まない、完全な形の不等式である。この成果が高次元統計学の発展に与える学術的息が大きいと考えられる。そして、それは複雑な統計モデルが用いられることの多い現代の一般社会への応用にもつながるものである。

研究成果の概要（英文）：First, I completed the proof of a "stochastic maximal inequality", which had been a long-standing challenge. The "stochastic maximal inequality" is an inequality that suppresses the maximum process of the absolute value of a finite number of local martingales by the sum of a one-dimensional predictable increasing process starting from the origin and a one-dimensional local martingale starting from the origin. As its applications, I succeeded in extending Doob's inequality and Lenglart inequality to arbitrary finite dimensions.

Next, in 2022, I published a new book, "Martingale Methods in Statistics", which aims to explain the above research results.

研究分野：数理統計学

キーワード：マルチンゲール 最大不等式 高次元統計モデル LASSO Dantzig selector

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

高次元統計学において、最大不等式の重要性は十分に認識されていた。しかしながら、最大不等式はナイーブな三角不等式を出発点とし、エントロピーの積分条件を巻き込む形でしか与えられていなかった。そのため、高次元統計学への応用において、不必要に強い仮定を置いていると思われる箇所が多数見受けられる状況であった。

2. 研究の目的

本研究の主目標は、従来より研究されてきた独立同一分布に従うデータに対する、ベルンシュタインの使用をベースにした統計的推測理論およびそのための確率論的ツールを、確率過程、特にマルチンゲールの枠組みで再考察し、より発展させることである。

有限個の局所マルチンゲールの絶対値の最大値過程に対する最大不等式を、従来のものとは異なる形で導出する。よりシャープな不等式を得ることにより、高次元統計学において常識とされている仮定、仮説を見直し、より広範な応用を得ることを目標とする。

3. 研究の方法

最大不等式を導出するにあたり、風来のナイーブな三角不等式を用いる代わりに、伊藤の公式を用いた、いわゆるテイラー展開の応用形から出発し、証明の要所でマルチンゲール理論における可予測射影の技術を用いる。

研究を進めるにあたり、LASSO や Dantzig selector 等の、高次元統計学において重要とされる応用手法を常に意識し、それらに有用な形の最大不等式を導出できるように常に注意を払う。

4. 研究成果

長年の課題であった stochastic maximal inequality の証明を完遂し、それを用いて幾つかの有用な不等式を導出した。stochastic maximal inequality とは有限個の局所マルチンゲールの絶対値の最大値過程を、原点を出発する 1 次元可予測増加過程と原点を出発する 1 次元局所マルチンゲールの和で抑える不等式である。これらの両辺が確率過程である点がユニークなところであり、"stochastic" という形容詞を冠する所以である。応用として、もともと 1 次元の確率過程に対して与えられていた Doob の不等式および Lengart 不等式を、任意の有限次元にまで拡張することに成功した。

次に、上記の研究成果を解説することを最終地点とした著書『Martingale Methods in Statistics』を 2022 年に出版したこの著書の前半では、難解なマルチンゲール理論を、従来のどの文献よりも reader friendly に解説したという自負がある。後半では、マルチンゲール理論による統計解析を、洋書としては初めて詳細に解説した。

また、ひとつのトピックスとして、米国 Google 社の検索エンジンシステムの基礎を担う、PageRank という指標がある。それは、ウェブページの重要度を判定するための基準を定めるものであり、グラフ理論の枠組みで、確率過程 (特にマルコフ連鎖) のツールを援用して定義、実装される。これは元々 1998 年に開発されたものであったが、これまでもさまざまな工夫が加えられてきた。本年度、この発展の流れに一石を投じる貢献を行った。より詳細には、従来の PageRank がチューニングパラメータの取り方によってその順位統計量が変わってしまうという現象を呈していたのに対し、新たに MarkovRank という指標を定義し、その順位統計量がチューニングパラメータに依存せず、与えられたネットワークシステムを表す有向グラフの構造のみによって一意的に定まることを、マルコフ連鎖の理論を用いて証明した。R による実験データによる検証も行った。研究成果は、査読つき学術誌に公表した。(ただし、Google 社は元の PageRank の使用を終了しているため、本研究は一定の学術的価値はあるものの、その改良部分に対する特許等を取得するなどの実益を伴う貢献にはならないこととなった。)

いまひとつのトピックスとして、重みの付いたマーク付き経験過程の L_2 空間における弱収束の理論を研究し、その統計的応用 (仮説検定への応用) を考案したことである。この研究は、2010 年ごろから構想を温めていたものであるが、途中、2013 年より伊藤司氏との共同研究として徐々にその考察を深めてゆき、本年度ようやく完成・出版に至った。この研究結果の最大の利点は、重みとして、通常の sup ノルムを用いた場合には取り扱う

ことができず、 L_2 空間において扱えばうまく機能するようなものも採用できる点である。より具体的には、例えば、Kolmogorov-Smirnov や Cramer-von Mises の形式によるもののみならず、Anderson-Darling の形式による検定統計量の漸近分布をも導出できる。なお、この内容は Tsukuda and Nishiyama (2021, Electronic J. Statist.) において出版された。

他にも、モーメント法による推定量に基づいて、変化点検定のための新たな統計量を導出・提案したことが挙げられる。この方法の由来は、独立同一標本の場合のスコアに基づく検定統計量に遡るが、今回の方法は、尤度のような、何らかのコントラスト関数の微分の意味でのスコアを用いるというアイデアを拡張して、一般的な推定方程式の解として得られる推定量を基礎としている点にある。よって従来方法を真に拡張してものであるといえる。また、このような方法では、従来は、変化点の位置の推定は困難視されていたが、それを推定する新たな方法も提案し、一致性を数学的に証明し、さらに数値的に良い結果を得た。

最終年度には、stochastic maximal inequality の最初の統計的応用として、高次の自己回帰過程モデルにおける Dantzig selector と LASSO の l_2 一致性を証明した。この成果は、次年度(以降)において、新規の科学研究費の支援のもとに、新しい著書の中で発表する予定である。なお、最終年度の8月には、国際学会『EcoSta 2023』において、上記 および で述べた成果を、招待講演として発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yoichi Nishiyama	4. 巻 19
2. 論文標題 On rank statistics of PageRank and MarkovRank	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Waseda Global Forum	6. 最初と最後の頁 159-180
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Tsukuda Koji, Nishiyama Yoichi	4. 巻 14
2. 論文標題 Weak convergence of marked empirical processes in a Hilbert space and its applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Statistics	6. 最初と最後の頁 3914-3938
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/20-EJS1761	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 3件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Koji Tsukuda and Yoichi Nishiyama
2. 発表標題 Goodness-of-fit tests for Markovian processes based on marked empirical processes
3. 学会等名 3rd International Conference on Econometrics and Statistics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西山陽一
2. 発表標題 Three topics in nonparametric statistics
3. 学会等名 Waseda International Symposium（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佃康司、西山陽一
2. 発表標題 マーク付き経験過程に基づくマルコフ過程の適合度検定
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoichi Nishiyama
2. 発表標題 A stochastic maximal inequality and its applications
3. 学会等名 EcoSta 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Yoichi Nishiyama	4. 発行年 2022年
2. 出版社 CRC Press	5. 総ページ数 246
3. 書名 Martingale Methods in Statistics	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------