

令和 3 年 6 月 4 日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2020

課題番号：18K11460

研究課題名（和文）モード切替関数を連続関数で近似したハイブリッド力学系の安定性解析と分岐解析

研究課題名（英文）Bifurcation-based stability analysis of hybrid dynamical systems with smooth approximating mode switching functions

研究代表者

関川 宗久（SEKIKAWA, Munehisa）

宇都宮大学・工学部・准教授

研究者番号：90509704

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：ハイブリッド力学系の例として、スティック・スリップ運動を発生する力学モデルの乾性摩擦を滑らかな関数で近似し、そのときに生じる周期運動の分岐解析を行った。ベルト速度に周期的な摂動を印加し、周期点を追跡することで、1/1、2/1、および、3/1引き込み領域の2-パラメータ分岐図を作成した。その結果、引き込み領域内部では安定な周期点、サドル、および、完全不安定な周期点が共存すること、安定な周期点は周期倍分岐を連鎖的に発生しカオスが発生することが分かった。また、隣り合うn/1引き込み領域は2つのネイマルク・サッカー分岐曲線とサドルの周期倍分岐曲線を介して接続されていることが分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

機械工学、非線形動力学、分岐理論の3分野の知識を導入して、機械工学系の安定性解析を行った。非線形動力学分野でしばしば用いられる、分岐理論に基づく安定性解析法を応用して得られた研究成果は十分に学術的意義がある。

研究成果の概要（英文）：The author analyzed bifurcation of periodic motion when we approximate the dry friction of the mechanical model to generate a stick-slip motion in the smooth function as an example of hybrid dynamical systems. The author applied periodic perturbation to the belt speed, tracked the cycle point, and created a 2-parameter bifurcation diagram of 1/1, 2/1, and, 3/1 entrainment region. As a result, it was found that stable periodic point, saddle, and, unstable periodic points coexist in entrainment region, and a nonlinear phenomena such as period-doubling bifurcations, chaos, and so on are observed at stable periodic point. In addition, it was found that adjacent n/1 entrainment regions were connected through two Neimark-Sacker bifurcation curves and the period-doubling bifurcation curve of saddle.

研究分野：人間情報学

キーワード：カオス

1. 研究開始当初の背景

自然科学の多様な分野において、不連続性を持つ力学系によりモデル化される現象が数多くある。工学システムでは、図1に示すような、常微分方程式で記述される複数の連続時間力学系 (mode) が、離散事象 (event) の発生によって切り替わるハイブリッド力学系がよく現れる[1]。

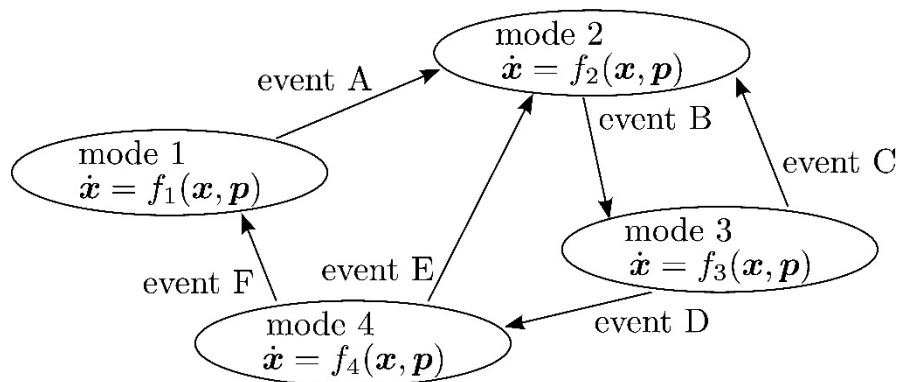


図1 ハイブリッド力学系

例えば、ロボット、自動車、飛行機、化学プラントなどは、力学的要素とコンピュータプログラムによって実現される論理的要素が混在したシステムである。このようなシステムの制御系は試行錯誤的な方法で設計されてきており、これまで、モデル化手法や制御手法の提案が行われてきた[1]-[5]。一方、ハイブリッド力学系の解析において、大域的なパラメータ範囲での俯瞰的な安定性解析や詳細な研究成果が皆無であることに違和感を覚え、申請者はその研究を開始した。しかしながら、動作モードの切り換え時刻が数値的にしか求められないため十分な精度を得ることが出来ず、また、区分的な厳密解と解の大域的構造との関係を定量的に評価することが難しいなどの困難が存在し、俯瞰的な安定領域を得ることすらできなかつた。すなわち、ハイブリッド力学系では、イベントの監視が必要であり、また、mode 切替時に微分が不連続になるため、ハイブリッド力学系に生じる現象の安定性解析の計算アルゴリズムは非常に複雑となる。そこで、ハイブリッド力学系の計算アルゴリズムの簡素化を図り、現実的時間で数値計算が実行可能な力学モデルとして再構築することを目指す。

2. 研究の目的

これまでの研究により、ハイブリッド力学系の安定性解析に関する研究が皆無な理由を理解し、現実的時間で実行可能な解析手法を提案することの重要性に気付いた。本研究では、分岐理論を適用可能な解析手法を提案し、機械工学システムの例題を用いて提案手法の妥当性と有効性を評価する。

本研究の学術的な特色として、機械工学、非線形力学、分岐理論の3分野の知識を導入して、研究を遂行する点が挙げられる。本研究では、機械工学系の安定性解析として、非線形力学分野でしばしば用いられる、分岐理論に基づく安定性解析法を応用する。前述の通り、解析対象とするスティック・スリップ振動は、乾性摩擦力である最大静止摩擦力と動摩擦力が切り替わることにより、スティック状態とスリップ状態が交互に現れるハイブリッド力学系である。ハイブリッド力学系では、数値積分法を用いて運動方程式を解く際、解の切り替え時間をニュートン・ラプソン法などを用いて数値的に求め、複数の運動方程式を切り替える必要がある。そのため、状態方程式や変分方程式を数値計算する上で大きな計算コストがかかる。そこで、不連続関数で表現される摩擦特性を連続関数近似することにより、滑らかな力学系として近似して解析を行う。これにより、近似モデルではあるが現実的時間で数値計算が実行可能な力学モデルの構築が可能となる。

3. 研究の方法

コロブスの卵的な発想であるが、本研究では、離散事象の切り替えを表す不連続関数を微分可能な連続関数で近似することで計算アルゴリズムの簡素化を図り、現実的時間で数値計算が実行可能な力学モデルを構築し、安定性解析を行う。安定性解析には、非線形力学分野でしばしば用いられている、分岐理論に基づいた解析手法[6]を適用する。ここでは概要を説明する。

次式の1階連立微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

初期値が $x = u_0$ となる式(1)の解を

$$x(t) = \varphi(t; u_0, \lambda) \quad (2)$$

とおく。ここで、 $x = (x, y)^T$ であり、 λ は可変パラメータである。このとき、式(1)に印加される

摂動が $2\pi/\omega$ の周期関数であることに注意すれば、 $t = 0$ における相平面と $t = 2\pi/\omega$ における相平面は同一視することができ、次式のポアンカレ写像 T_λ を定義することができる（図2参照）。

$$T_\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u_0 \mapsto T_\lambda(u_0) = \varphi(2\pi/\omega; u_0, \lambda) \quad (3)$$

対象とする元の連続力学系(1)の周期解はポアンカレ写像 T_λ の周期点に対応する。

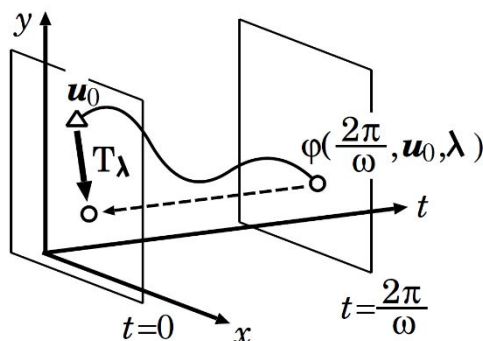


図2 ポアンカレ写像

今、 u_0 をポアンカレ写像 T_λ の m 周期点とすると、 u_0 は次式を満たす。

$$T_\lambda^m(u_0) - u_0 = 0 \quad (4)$$

ここで、 T_λ^m は T_λ の m 回合成写像を示す。周期点 u_0 の性質は、次の特性方程式の根 μ によって分類される。

$$\left| \frac{d}{du_0} T_\lambda^m(u_0) - \mu I \right| = 0 \quad (5)$$

ここで、 I は単位行列である。特性方程式の根を μ_1, μ_2 ($|\mu_1| \geq |\mu_2|$) とする。 $|\mu_1| < 1$ のとき周期点は安定であるという。 $|\mu_1| > 1 > |\mu_2|$ のとき周期点はサドルであるという。 $|\mu_2| > 1$ のとき、周期点は不安定であるという。また、 $|\mu| = 1$ のとき安定性の変化する、分岐と呼ばれる現象が発生する。以下に分岐の種類を列挙する。

1. サドル・ノード分岐：分岐集合を通過するようにパラメータを変化させたとき、サドルと安定な周期点、または、サドルと完全不安定な周期点が融合し、これらの周期点は消滅する。以下、この分岐パラメータ集合を、それぞれ、sSN、および、uSNと記す。

2. 周期倍分岐：安定な周期点がサドルとなり、そのサドルの近傍に元の安定な周期点の2倍の周期をもつ安定な周期点が発生する。周期倍分岐は連鎖的に発生し、周期倍分岐の集積によってカオスが発生することが知られている。以下、この分岐パラメータ集合をsPDと記す。また、サドルが完全不安定な周期点となり、その完全不安定な周期点の近傍に元のサドルの2倍の周期をもつサドルが発生する分岐も存在する。この分岐パラメータ集合をuPDと記す。

3. ネイマルク・サッカーク分岐：二つの固有値が複素共役となり、複素平面上で単位円を横切るときに発生する。安定な周期点不安定化し、その周期点の近傍にポアンカレ写像の点列による不変閉曲線（連続時間ではトーラス）が発生する。以下、この分岐パラメータ集合をNSと記す。

サドル・ノード分岐と周期倍分岐が発生するパラメータ値は、 μ の値をそれぞれ、1と-1とし、ネイマルク・サッカーク分岐が発生するパラメータ値は、 $|e^{i\theta}| = 1$ として、式(4)と式(5)を連立させて解くことで求められる。

4. 研究成果

本研究では、図3に示す力学モデルを具体例として、ハイブリッド力学系に対して、提案手法を適用して、詳細な解析を行った。物体の水平方向の変位を x [m]とする。図3において、質量

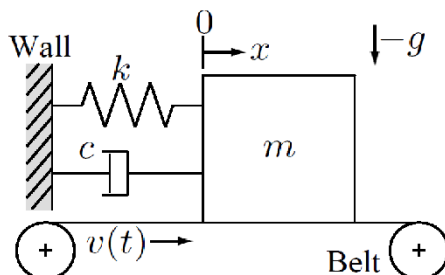


図3 力学モデル

m [kg]の物体が、粘性係数 c [Ns/m]のダッシュポットとばね定数 k [N/m]の線形ばねを介して壁に固定された状態で、一定速度 $v(t) = v_0$ [m/s]で移動しているベルト上に置かれている。ここで、物体とベルト表面間に乾性摩擦力が作用しているものとし、この摩擦特性を物体とベルトの相対速度の関数として、 $F(v(t) - \dot{x})$ と記述する。ここで、 \dot{x} は変位 x の時間微分を表す。 $v(t) = 0$ のときの釣り合い点を原点とすると、その運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mgF(v(t) - \dot{x}) \quad (6)$$

と記述される。

一般的に、動摩擦係数は静止摩擦係数より小さく、物体の速度が小さいとき、乾性摩擦特性 $F(\dot{x})$ は次式で表される。

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} \mu_s(1 - s\dot{x}) & \text{if } \dot{x} \geq 0 \\ -\mu_s(1 + s\dot{x}) & \text{if } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 μ_s は静止摩擦係数である。図3の力学モデルは、ベルト速度 v_0 をある程度大きい値にしたとき、図4(a)に示すように自励振動が発生する。この振動は、物体とベルト表面間に作用する乾性摩擦力の影響により発生し、物体とベルトが固着し線形ばねを引き延ばしながら運動するスティック状態($\dot{x} = v_0$)と、物体がベルト上を滑りながら運動するスリップ状態($\dot{x} \neq v_0$)を繰り返す。このような自励振動はスティック・スリップ運動と呼ばれる。

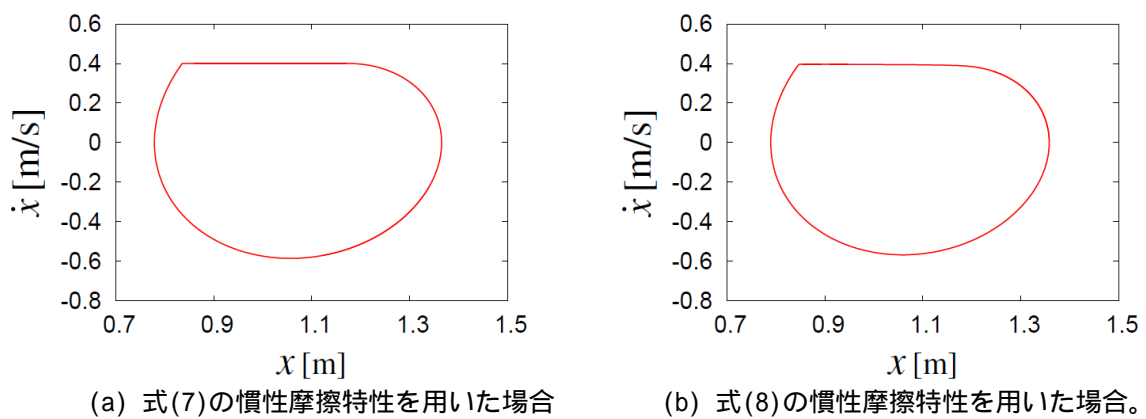


図4 相平面上のスティック・スリップ運動。ここで、 $m = 0.1$ [kg]、 $c = 0.05$ [Ns/m]、 $k = 0.4$ [N/m]、 $g = 9.8$ [m/s²]、 $v_0 = 0.4$ [m/s]、 $\mu_s = 0.5$ 、 $s = 0.2$ とした。

さて、式(7)の乾性摩擦特性は不連続関数で記述されており、そのような特性を有するモデルの分岐解析は困難である。すなわち、不連続点でポアンカレ写像の合成が必要となるため計算アルゴリズムが複雑になり、また、計算時間が長くなる問題が生じる。そのため、不連続関数を連続で微分可能な関数で近似し、計算アルゴリズムの簡素化、および、分岐計算時間の短縮を図ることが文献[7]で提案された。

そこで、以下では、式(7)の慣性摩擦特性を次式の滑らかな関数で近似する。

$$F(\dot{x}) = \mu_s(2U_G(\dot{x}) - s - s\dot{x}) \quad (8)$$

ここで、 $U_G(x)$ は次式で表されるシグモイド関数である。式(8)で近似した、滑らかな慣性摩擦特性を図5に示す。このように、滑らかな関数で近似した場合、図4(b)に示すように、元の不連続関数の摩擦特性をもつときのスティック・スリップ運動と区別がつかない運動が発生する。以

$$U_G(x) = \frac{1}{1 + e^{-Gx}} \quad (9)$$

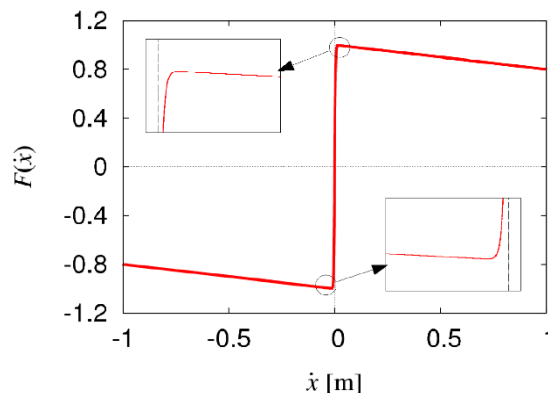


図5 滑らかな慣性摩擦特性。ここで、 $\mu_s = 0.5$ 、 $s = 0.2$ 、 $G = 500$ とした。

下では、図 4(b)の運動を生じさせるベルト速度 $v(t)$ に対し、摂動 $v_1 \sin \omega t$ を加えたときに生じる周期運動の分岐解析を行い、 $\omega-v_1$ 平面上の 2-パラメータ分岐図を作成する。ここで、 v_1 [m/s] はベルト速度に与える摂動の大きさであり、 ω [rad/s]はその角振動数である。数値積分には 4 次のルンゲ・クッタ法を用い、その積分刻みを $2\pi/\omega/8192$ とした。また、以下ではパラメータを $m = 0.1$ [kg]、 $c = 0.05$ [Ns/m]、 $k = 0.4$ [N/m]、 $g = 9.8$ [m/s²]、 $v_0 = 0.4$ [m/s]、 $\mu_s = 0.5$ 、 $s = 0.2$ 、 $G = 500$ に固定する。

図 6(a)に得られた 2-パラメータ分岐図の全体像を示す。スティック・スリップ運動に摂動を加えると、 $v_1 = 0$ で $\omega = \omega_0/n$ の点から引き込み領域が発生することが確認された。ここで、 $n = 1, 2, 3$ は正整数であり、 $\omega_0 \approx 1.8314$ [rad/s]は自励スティック・スリップ運動の角振動数である。

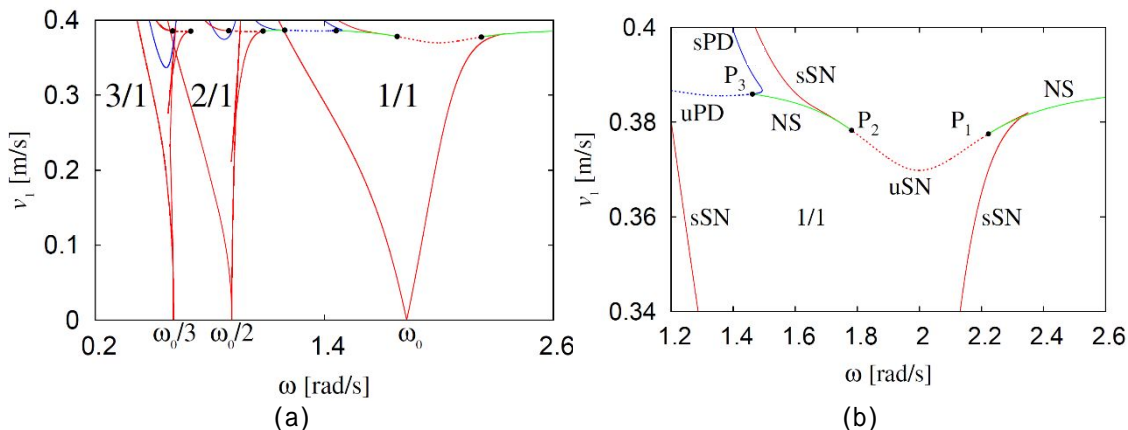


図 6 (a) 分岐図の全体像。ここで、赤はサドル・ノード分岐集合、青は周期倍分岐集合、緑はネイマルク・サッカー分岐集合である。(b) 1/1とラベルした引き込み領域の拡大図。

1/1とラベルした引き込み領域の拡大図を図 6(b)に示す。解析の結果、引き込み領域はsSNとuSNで示した、それぞれ、安定、および、不安定なサドル・ノード分岐集合で囲まれており、その内部には、安定な周期点、サドル、および、完全不安定な周期点が共存することがわかった。また、引き込み領域を形成する右側のsSN分岐曲線を追跡した結果、 P_1 と P_2 で示す、余次元 2 の分岐点の発生が確認された。これらの点を境にsSN分岐集合はuSN分岐集合に変化する。また、これらの余次元 2 の分岐点ではポアンカレ写像の周期点の固有値は1の重根となり、サドル・ノード分岐に加えネイマルク・サッカー分岐の分岐条件が満たされる。したがって P_1 と P_2 を始点にNS分岐曲線が発生する。ここで、 P_2 を始点とする、図 6(b)の左側のNS分岐曲線を追跡すると別の余次元 2 の分岐点 P_3 が発生する。前述の二つの余次元 2 の分岐点 P_1 、 P_2 とは異なり、この点ではポアンカレ写像の周期点の固有値は-1の重根となる。したがって、余次元 2 の分岐点 P_3 ではネイマルク・サッカー分岐の発生条件に加え、周期倍分岐の発生条件が満たされる。詳細な分岐解析の結果、ネイマルク・サッカー分岐を特徴づける複素固有値は、余次元 2 の分岐点 P_3 を境に実固有値となることで、ネイマルク・サッカー分岐曲線NSが消滅し、安定な周期倍分岐集合sPDと不安定な周期倍分岐集合uPDが発生することが明らかになった。

< 引用文献 >

- [1] A. van der Schaft and H. Schumacher, An Introduction to Hybrid Dynamical Systems, (Springer) 2000.
- [2] A.V. Savkin and R. J. Evans, Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems, (Birkhaeuser) 2002.
- [3] R. Goebel, R.G. Sanfelice, and A.R. Teel, Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness, (Princeton University Press, Princeton) 2012.
- [4] H. Lin and P.J. Antsaklis, Hybrid Dynamical Systems: An Introduction to Control and Verification, (Now Publishers) 2014.
- [5] Md. Djemai and M. Defoort (Eds.), Hybrid Dynamical Systems, (Springer) 2015.
- [6] H. Kawakami, Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters, IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-31, pp.248-260, 1984.
- [7] H. Kitajima, and T. Yazawa, Modified Lue-Rudy model and its bifurcation analysis for suppressing alternans, Proc. NOLTA, pp. 90-393, 2011.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sekikawa Munehisa, Inaba Naohiko	4. 巻 31
2. 論文標題 Chaos after Accumulation of Torus Doublings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Bifurcation and Chaos	6. 最初と最後の頁 2150009 ~ 2150009
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218127421500097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tri Quoc Truong, Tadashi Tsuboneb, Munehisa Sekikawa, and NaohikoInaba	4. 巻 401
2. 論文標題 Border-collision bifurcations and Arnol'd tongues in two coupled piecewise-constant oscillators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physica D	6. 最初と最後の頁 132148
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physd.2019.132148	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 K. Chida and M. Sekikawa
2. 発表標題 A study of the motion of a bouncing spring on a vibrating plate based on an exact solution
3. 学会等名 2020 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 M. Sekikawa and F. Grassia
2. 発表標題 FPGA Design of a Chaotic Quartic-Neuron Model
3. 学会等名 2019 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------