

令和 3 年 5 月 8 日現在

機関番号：32641

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2020

課題番号：18K12749

研究課題名（和文）積分可能性理論のnon-smooth的展開とその計量経済学的应用について

研究課題名（英文）Non-Smooth Integrability Theory and Its Application for Econometrics

研究代表者

細矢 祐誉（Hosoya, Yuhki）

中央大学・経済学部・准教授

研究者番号：30383954

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は消費者理論の一部である積分可能性理論を発展させることを主眼として行われた。積分可能性理論は、消費者行動を表現する需要関数から、消費者の好みを表現する効用関数を逆算しようとする分野であり、行動から好みを導き出そうとするものである。経済学の応用研究では消費者の好みの情報が必要な場合が多く、そのためこのような研究が必要になる。

本研究では微分方程式の解析を経て、当該分野について様々な新しい結果を得ることに成功した。特に原理的な逆算可能性を担保する復元可能性理論については、新しい結果を出版することに成功している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果の概要で述べたように、経済学における応用研究において消費者の好みを調べることは非常に重要である。なぜなら、どのような経済が人々にとってより望ましいかは好みによって変化するからである。しかしながら、アンケート調査などを用いて好みを測るやり方は様々な問題を抱えていることがわかっており、そのため行動から推定することが望ましい。本研究はこのような行動からの好みの推定について、原理的な可能性から実用的な計算手法の構築まで、幅広く扱ったものである。

研究成果の概要（英文）：The main purpose of this research was to develop integrability theory, which is a part of consumer theory. Integrability theory is a field that attempts to calculate the utility function, which expresses consumer's preference, backwards from the demand function, which expresses consumer's behavior, in order to derive preferences from behavior. In applied research in economics, information on consumer's preferences is needed, and thus this type of research is necessary.

In this study, through the analysis of differential equations, we have succeeded in obtaining a variety of new results in this field. In particular, we have succeeded in publishing new results on the theory of recoverability, which guarantees in principle the possibility of inversion.

研究分野：消費者理論

キーワード：消費者理論 積分可能性 復元可能性 微分方程式

### 1. 研究開始当初の背景

研究開始時点において積分可能性理論の最新の結果は Hosoya (2013, 2015)による間接法の研究と、Hosoya (2017)による直接法の研究だった。特に後者は積分可能性理論の計量経済学への応用まで含んだ非常に広範な結果を含んでおり、この年代での理論の集大成であったと言える。

しかし、Hosoya (2017)では需要関数に連続微分可能性を仮定していた。これが非常に問題のある仮定で、第一にいわゆる端点解があるようなモデルでは需要関数はまず微分可能にならない。端点解が出ないモデルでは今度は値域が狭すぎることが多く、効用関数を十分適切に計算できない。これに加えて、連続微分可能な需要関数の空間というのが通常の位相に関して閉集合にも閉集合にもならないという問題があり、これが統計学的な応用を考える際の大きな壁になっていた。

### 2. 研究の目的

背景で書いたことから、積分可能性理論の結果としての Hosoya (2017)の結果を、微分可能性を取り払って出し直すことが必要であった。

微分可能性を仮定しないということは、この分野で定番の技術であるスルツキー行列の解析が使えないということである。これは非常に大きな困難を引き起こすことが想定されたが、この問題の解決法は局所リプシッツ性という微分可能性よりも弱い性質にあった。

ラーデマッハーの定理により、局所リプシッツな関数はほとんどすべての点で全微分可能である。ここで言う「ほとんどすべての点」というのはルベグ測度に関してという意味である。全微分可能であるということは、その点でスルツキー行列が定義できるということである。そこで、「ほとんどすべての点」でのスルツキー行列の性質から積分可能性の結果が言えれば問題は解決する。このラインに沿って、局所リプシッツな需要関数で積分可能性理論の結果を出すことが本研究の目的であった。

### 3. 研究の方法

まず、基本的なアイデアから述べる。直接法の積分可能性理論の基礎にあるのはいわゆる双対性のアイデアである。効用関数と需要関数は、効用最大化問題を通じて関係している。一方、効用最大化問題の双対問題である支出最小化問題の価値関数を支出関数と呼ぶが、効用関数がわからなくとも、支出関数がわかればそこから少し工夫するだけで効用関数が導出できる。これが直接法の基本的なアイデアであるのだが、問題はふたつあって、第一に需要関数の候補を与えたときに、それが需要関数になっているか(つまり、対応する効用があるかどうか)を判定する方法がなければならぬ点、第二に効用関数を使わずに支出関数を計算しなければならぬ点があった。この二点を解決するために使われるのがシェパードの補題である。

シェパードの補題は支出関数と需要関数の間に成り立つ普遍的な偏微分方程式である。与えられた需要関数に対応する効用関数がわからなくとも、シェパードの補題を偏微分方程式と見なして解いて支出関数を導出すれば、そこから効用関数が導出できる。この作業は偏微分方程式から常微分方程式に変換できることが知られていて、実質的には常微分方程式を解く作業だけで問題は解決する。先ほど挙げた問題のうち二番目の問題はこのアイデアで解決する。一番目の問題はもう少しやっかいだが、少なくともこの路線で解決の糸口が見える問題にはなっている。

しかし、実際にこの線に沿って証明を構築していくと、すぐ困難に直面する。問題は、シェパードの補題の解の候補になる関数を、偏微分方程式を用いて解こうとするときに起こる。というのは、この解の候補関数のグラフは通常  $n$  次元の可微分多様体になり、需要関数の候補の定義域は  $n+1$  次元の開集合であるため、サードの定理から測度ゼロである。つまり、「ほとんどすべての点」でなんらかの仮定を需要関数の候補が満たしていたとしても、それはいまその仮定が必要な集合上の「すべての点で成り立たない」可能性があるのである。

この問題は、支出関数の候補を計算するための常微分方程式のパラメータとして価格だけでなく所得も用いることで、一応解決できる。つまり、摂動パラメータとして初期所得を用いて摂動させることで、「ほとんどすべての」解候補の軌道では問題が生じないことが示せて、後は収束を用いて議論すればよい。このアイデアは強力で、これを用いることで支出関数の候補を微分方程式で求めること自体には、スルツキー行列の主要な性質が「ほとんどすべての点」で成り立つことから示すことができる。

しかし、これだけでは問題が解決しない。Hurwicz and Uzawa (1971)の時代から、微分方程式の解から効用関数を求めるまでに使う性質として、顕示選好の弱公理よりも少し強い仮定を求める部分がある。その部分は顕示選好の公理的な書き方がなされているため、結論の部分に強い不等号が出てくる。容易にわかるように、近似によって計算すると最終的には極限を取る操作

を行う必要があり、そして強い不等号は極限操作で破壊されるため、この部分をべつの論理を用いて埋めないと最後の結論に至ることができないのである。このやっかいな問題を埋める作業が最後に残っており、これは絶対連続関数の積分の評価に関する不等号を用いて、かろうじて埋めることができた問題である。

#### 4. 研究成果

上記の研究手法で挙げた難点を克服したことで、本研究課題で研究代表者は以下の結果を得た。まず、局所リプシッツでワルラス法則を満たす需要関数の候補が需要関数であるための必要十分条件は、「スルツキー行列がほとんどすべての点で半負値定符号かつ対称である」こと、あるいは「シェパードの補題に対応する偏微分方程式について、任意の初期値に対して正象限全体で定義された連続微分可能な解が存在すること」であることがわかった。後者は非常に優れた結果で、顕示選好の公理群と異なり、強い不等号のような、極限操作で破壊される性質を一切含まない。ここから需要関数の空間にある種の完備性が証明できることがただちにわかる。

次に、この結果を通じて研究代表者は、上記の需要関数の候補から効用関数を導出する方法を見いだした。この計算法で出てくる効用関数は需要関数の値域上で上半連続であり、またその条件を満たす選好関係は需要関数の値域上で一意に定まる。需要関数の値域が正象限をすべて含みさらに非負象限内部で相対位相について開集合である場合、技術的な手法を用いてこの需要関数の値域上で上半連続な効用関数を、消費集合全体で上半連続な効用関数に拡張でき、その拡張の仕方もやはり需要関数毎に一意である。

ここまでが研究期間に出したことである。これら研究成果を周知するための活動に研究機関の後半を費やしたのだが、最終年度はウイルスに関する問題のため海外の学会における研究報告が残念ながらできなかった。出版については、現在審査中のものをいくつか除くと、Journal of Mathematical Economics 誌に、上記の効用関数の一意性に関する部分をより一般の需要関数について議論した論文を出版済みである (Hosoya (2020))。他はまだ査読待ちの状態であることを付記しておく。

また、この分野の解析を通じて、スルツキー行列及び微分方程式の解析手法に一通り精通したおかげで、いくつかの派生分野に研究を応用できる可能性が浮かび上がっている。たとえば、準線形経済の均衡の一意性と局所安定性を一般的に導出する論文などがそれに該当する。この派生的な結果は研究期間終了後の2021年に日本経済学会で報告する予定である。

#### <参考文献>

- Hosoya, Y. (2013) "Measuring Utility from Demand." Journal of Mathematical Economics 49, pp.82-96.
- Hosoya, Y. (2015) "A Theory for Estimating Consumer's Preference from Demand." Advances in Mathematical Economics 19, pp.33-55.
- Hosoya, Y. (2017) "The Relationship between Revealed Preference and the Slutsky Matrix." Journal of Mathematical Economics 70, pp.127-146.
- Hosoya, Y. (2020) "Recoverability Revisited." Journal of Mathematical Economics 90, pp.31-41.
- Hurwicz, L. and Uzawa, H. (1971) "On the Integrability of Demand Function." In: Chipman, J. S., Hurwicz, L., Richter, M. K., Sonnenschein, H. F. (Eds.) Preference, Utility and Demand, Harcourt Brace Jovanovich Inc., New York (1971) pp.114-148.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Hosoya Yuhki	4. 巻 90
2. 論文標題 Recoverability revisited	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Economics	6. 最初と最後の頁 31～41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmateco.2020.05.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yuhki Hosoya	4. 巻 3
2. 論文標題 Revealed Preference Theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applied Analysis and Optimization	6. 最初と最後の頁 179-204
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Hosoya Yuhki	4. 巻 11
2. 論文標題 First-order partial differential equations and consumer theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - S	6. 最初と最後の頁 1143～1167
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcdss.2018065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 細矢祐誉	4. 巻 111-4
2. 論文標題 経済学のための常微分方程式入門	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 三田学会雑誌	6. 最初と最後の頁 63-89
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 The Axiom for Concavifiable Preferences in View of Alt's Theory
3. 学会等名 日本経済学会2020年度秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 The Violation of Hamilton-Jacobi-Bellman Equation in Economic Dynamics
3. 学会等名 数理経済学会研究集会「数理経済学とその周辺」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 On the Uniqueness and Stability of the Equilibrium Price in Quasi-Linear Economies
3. 学会等名 慶應義塾大学経済研究所ミクロ経済学ワークショップ
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 The Violation of Hamilton-Jacobi-Bellman Equation in Economic Dynamics
3. 学会等名 関東学院大学経済経営研究所ワークショップ
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuhki Hosoya
2. 発表標題 Non-Smooth Integrability Theory
3. 学会等名 ICIAM2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuhki Hosoya
2. 発表標題 Shephard's Lemma and Non-Smooth Integrability Theory
3. 学会等名 NACA- ICOTA2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 Shephard's Lemma and Non-Smooth Integrability Theory
3. 学会等名 第25回DCコンファレンス
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 Shephard's Lemma and Non-Smooth Integrability Theory
3. 学会等名 数理経済学会研究集会「数理経済学とその周辺」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 Shephard's lemma as a partial differential equation
3. 学会等名 第24回DCコンファレンス
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 細矢祐誉
2. 発表標題 Non-smooth integrability theory and partial differential equations
3. 学会等名 Mathematical Economics 2018 workshop at Kyoto
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuhki Hosoya
2. 発表標題 Shephard's lemma and partial differential equations
3. 学会等名 6th conference of nonlinear analysis and optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------