

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：11101

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13381

研究課題名(和文)非可換射影超曲面の研究

研究課題名(英文)A study of noncommutative projective hypersurfaces

研究代表者

上山 健太 (Ueyama, Kenta)

弘前大学・教育学部・准教授

研究者番号：30746409

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：非可換次数付き超曲面環およびそれに付随する非可換射影スキーム(=非可換射影超曲面)に関する様々な研究を行った。例えば、非可換行列因子化という概念を導入・研究し、Eisenbudの定理の非可換次数付き類似を与えた。さらにこれを応用し、Knoerrer周期性定理の非可換次数付き版を与えた。また、 $(\pm 1)$ 歪した $(A_1)$ 型2次超曲面上の次数付き極大Cohen-Macaulay加群の安定圏は組合せ的な操作で計算できることを証明した。さらにこれを応用し、 $(\pm 1)$ 歪した滑らかな射影2次超曲面の導来圏は充満強例外列を持つことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非可換次数付き超曲面環や非可換射影超曲面の研究を今後さらに展開させる上で礎となる結果や手法を多数提供できたことは、非常に意義深いことである。また、今回の研究は非可換代数幾何学、代数幾何学、可換環論、表現論、組合せ論など、様々な分野に関連しており、異なる分野の知見を統一的に理解するための足掛かりを与えたことにも大きな意義がある。

研究成果の概要(英文)：Various studies related to noncommutative graded hypersurface rings and their associated noncommutative projective schemes (i.e., noncommutative projective hypersurfaces) were carried out. For example, I introduced and studied the notion of noncommutative matrix factorization and gave a noncommutative analogue of Eisenbud's theorem. Applying this result, I also gave a noncommutative graded version of Knoerrer's periodicity theorem. In addition, I proved that the stable category of graded maximal Cohen-Macaulay modules over a  $(\pm 1)$ -skew graded  $(A_1)$  hypersurface singularity can be explicitly computed using combinatorial methods. Applying this result, I also proved that the derived category of a smooth  $(\pm 1)$ -skew quadric hypersurface has a full strong exceptional sequence.

研究分野：非可換代数幾何学

キーワード：非可換超曲面 非可換射影超曲面 非可換射影スキーム 非可換行列因子化 Cohen-Macaulay加群の安定圏 Knoerrer周期性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1990年頃に Michael Artin によって創設された非可換代数幾何学という研究分野において、Artin-Schelter 正則代数 (AS 正則代数) は非常に重要な研究対象である。特に、ネーターAS 正則代数に付随する非可換射影スキーム(と呼ばれるアーベル圏)は非可換射影空間と考えられており、様々な角度から研究・応用されている。一方、可換環論や代数幾何学において、超曲面は基本的な対象であるため、その非可換版を考察しようというのは自然な問題意識である。可換の場合に鑑みて、ネーターAS 正則代数を斉次正規正則元で生成されたイデアルで割って得られる次数付き剰余環のことを非可換次数付き超曲面環と呼ぶことにする。非可換次数付き超曲面環の研究は、AS 正則代数の研究に比べると充実しているとは言い難い状況であった。

### 2. 研究の目的

上で述べた背景を踏まえて、非可換代数幾何学の次なる一步として、非可換次数付き超曲面環およびそれに付随する非可換射影スキーム(=非可換射影超曲面)の研究に取り組むのが本研究課題の目的である。

### 3. 研究の方法

次の4つの方向性で研究に取り組むことにした。

- (1) AS 正則代数や非可換射影空間そのものの研究を推進する。
- (2) 非可換次数付き超曲面環上の次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群(次数付き CM 加群)の安定圏の研究を推進する。
- (3) Segre 積の観点から非可換次数付き超曲面環にアプローチする。
- (4) 良い非可換射影超曲面の分類を与える。

それぞれについて以下で説明を加える。

#### (1) について:

非可換次数付き超曲面環が AS 正則代数の剰余環であることから、AS 正則代数についての理解を深めることは必須である。

#### (2) について:

CM 加群の表現論はとても注目されている研究分野であり、非可換次数付き超曲面環上の次数付き CM 加群の安定圏の構造を調べることも非常に重要な研究課題である。それに加えて、Orlov の埋め込み定理により、非可換射影超曲面の導来圏と次数付き CM 加群の安定圏は密接な関係にあることが知られているため、得られた結果は非可換射影超曲面の導来圏の研究に応用できる可能性がある。可換な場合、超曲面環上 CM 加群の安定圏は行列因子化(matrix factorization)の商圏と圏同値になることが知られており、このことが CM 加群の理論と計算の両面において不可欠な働きをしている。これよりも、非可換な状況での行列因子化の理論を整備するところから始める必要があると考えられる。

#### (3) について:

3次元射影空間内の滑らかな2次射影曲面は、二つの射影直線の Segre 積で得られる。この事実をうまく非可換に一般化することで、非可換な2次射影曲面についてよりよい理解が得られると考えられる。

#### (4) について:

(2)で得られた次数付き CM 加群の安定圏の情報を応用して、良い非可換射影超曲面の分類が与えられないかを検討する。

### 4. 研究成果

上で述べた4つの方向性に分けて研究成果を述べる。

#### (1) に関する研究成果:

東京理科大学の板場綾子氏との共同研究で、次数1とnの元によって生成された次数付き down-up 代数(と呼ばれる AS 正則代数)の Beilinson 代数の Hochschild cohomology の計算を行った。その結果、nの値によって非可換射影スキームの導来圏の様子が異なっていることが分かった。

大阪大学の東谷章弘氏との共同研究で、 $(\pm 1)$ 歪多項式環に付随する非可換射影スキーム

( $\pm 1$ )歪射影空間)の組合せ論的な分類を与えた。特に、主結果の一つとして、二つの( $\pm 1$ )歪射影空間が疑スキームとして同型になることとそれぞれに付随するグラフがスイッチング同値になることが同値な条件であることを示した。頂点数を固定したグラフのスイッチング同値類の個数を求める公式が既に知られていることから、次元を固定した( $\pm 1$ )歪射影空間の疑スキームとしての同型類の個数が明らかとなった。主結果では、( $\pm 1$ )歪射影空間の分類と単体的複体や点スキームの分類との関係も述べられている。また、( $\pm 1$ )歪射影空間の不変量の組合せ論的考察も行われた。

(2)に関する研究成果：

静岡大学の毛利出氏との共同研究で、非可換行列因子化という概念を導入・研究し、非可換行列因子化の圏と全反射加群の圏の関係性を明らかにした。特に、Eisenbudの定理の非可換次数付き類似を与えた。非可換行列因子化の応用として、捩れ外積代数上の全反射加群の研究も行った。

静岡大学の毛利出氏との共同研究で、(2)の研究成果の応用として、非可換次数付きKnörrer周期性の研究を行った。Knörrer周期性は可換超曲面上のCM加群の安定圏に現れる周期性で、可換環論において非常に重要な役割を担っている。この研究では、まず次数付きKnörrer周期性定理の非可換への自然な一般化を与えた。Knörrer周期性は強力な定理であり、非可換ではそれなりの仮定が必要になる。そのため、上記の結果が適用できない非可換次数付き超曲面も存在する。そのような非可換次数付き超曲面上の次数付きCM加群の安定圏の構造を調べるため、2次超曲面に的を絞って様々な計算方法を与えた。

大阪大学の東谷章弘氏との共同研究で、( $\pm 1$ )歪した(A<sub>1</sub>)型2次超曲面上の次数付きCM加群の安定圏は組合せ的な操作で計算できることを証明した。具体的には、( $\pm 1$ )歪した(A<sub>1</sub>)型2次超曲面から単純グラフを構成し、そのグラフに対して、4種類のグラフ操作を繰り返し行ってグラフを変化させていった結果で安定圏が計算できるということを示した。その系として、この安定圏は可換のとき(つまり(A<sub>1</sub>)型超曲面のとき)と同様に半単純環の導来圏と三角圏同値になるが、現れる半単純環の種類が可換のときより増えるということが分かった。また、Stanley-Reisnerイデアルの性質を用いることで、安定圏と点スキームの関係性も明らかにした。

( $\pm 1$ )歪した(A<sub>1</sub>)型2次超曲面上の次数付きCM加群の安定圏の計算方法を与えた。もう少し正確に言うと、( $\pm 1$ )歪した(A<sub>1</sub>)型2次超曲面上の次数付きCM加群の安定圏がどのような有限次元代数上の有限次元加群圏の有界導来圏と三角圏同値になるかについて明確に理解する方法を示した。その帰結として、全ての( $\pm 1$ )歪した(A<sub>1</sub>)型2次超曲面は加算無限CM表現型であり、付随する非可換射影スキームは滑らかでないことが証明された。

(3)に関する研究成果：

杭州師範大学(中国)のJi-Wei He氏との共同研究で、twisted Segre productという概念を導入し、考察した。まず、二つのネーターKoszul AS正則代数のtwisted Segre productがネーターであれば、それに付随する非可換射影スキームが滑らかであることを示した。この証明のために稠密(双)次数付き代数というクラスが導入された。次に、二つの2変数多項式環のdiagonal twisting mapによるtwisted Segre productが3次元の非可換次数付き2次超曲面環になっていることを証明した。非可換次数付き超曲面環はネーターであるため、先の結果より、付随する非可換射影スキームは滑らかになる。また、このときの次数付きCM加群の安定圏の構造も明らかにした。

(4)に関する研究成果：

この研究では、(2)の研究成果を応用して、( $\pm 1$ )歪した滑らかな射影2次超曲面の導来圏は充満強例外列を持つことを証明した。これは、Kapranovの定理(滑らかな射影2次超曲面の導来圏は充満強例外列を持つこと)の非可換への一般化である。興味深い点として、今回構成した充満強例外列の長さは( $\pm 1$ )歪の仕方によって変わることも分かった(充満強例外列の長さは二元体上の行列の計算を用いて、明示的に求めることができる)。特に、次元を固定すると、可換の場合が一番短く、( $\pm 1$ )歪すると可換のときと同じかそれより長くなることが分かった。さらに、得られた充満強例外列の応用として、充満強例外列で構成した傾対象のEnd環を調べることで、( $\pm 1$ )歪した滑らかな射影2次曲面(つまり2次元の場合)の導来同値分類を与えることができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Itaba Ayako, Ueyama Kenta	4. 巻 20
2. 論文標題 Hochschild cohomology related to graded down-up algebras with weights (1,n)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 2150131(19pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219498821501310	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Mori Izuru, Ueyama Kenta	4. 巻 15
2. 論文標題 A categorical characterization of quantum projective spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Noncommutative Geometry	6. 最初と最後の頁 489 ~ 529
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/jncg/403	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Mori Izuru, Ueyama Kenta	4. 巻 586
2. 論文標題 Noncommutative matrix factorizations with an application to skew exterior algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 1053 ~ 1087
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.07.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Higashitani Akihiro, Ueyama Kenta	4. 巻 73
2. 論文標題 Combinatorial study of stable categories of graded Cohen-Macaulay modules over skew quadric hypersurfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Collectanea Mathematica	6. 最初と最後の頁 43 ~ 54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13348-020-00306-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ayako Itaba and Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Hochschild cohomology of Beilinson algebras of graded down-up algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 52nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 29-34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Noncommutative matrix factorizations and noncommutative Knorrer's periodicity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 52nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 73-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 上山健太	4. 巻 -
2. 論文標題 歪2次超曲面に付随する三角圏とグラフの変形操作	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 第65回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 56-69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenta Ueyama	4. 巻 62
2. 論文標題 On Knorrer periodicity for quadric hypersurfaces in skew projective spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 896-911
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008439518000607	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama	4. 巻 223
2. 論文標題 The classification of 3-dimensional noetherian cubic Calabi-Yau algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 1946-1965
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2018.08.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mori Izuru, Ueyama Kenta	4. 巻 16
2. 論文標題 Noncommutative Knorrer 's periodicity theorem and noncommutative quadric hypersurfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 467 ~ 504
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/ant.2022.16.467	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 He Ji-Wei, Ueyama Kenta	4. 巻 611
2. 論文標題 Twisted Segre products	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 528 ~ 560
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2022.08.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ueyama Kenta	4. 巻 361
2. 論文標題 Skew graded ( $A_n$ ) hypersurface singularities	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Comptes Rendus. Mathematique	6. 最初と最後の頁 521 ~ 534
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/crmath.415	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ueyama Kenta	4. 巻 253
2. 論文標題 Derived categories of skew quadric hypersurfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 205 ~ 247
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-022-2360-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Twisted Segre products and noncommutative quadric surfaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 54th Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 136 ~ 141
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 上山健太
2. 発表標題 Classifying $(\pm 1)$ -skew projective spaces via graphs
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 上山健太
2. 発表標題 非可換射影空間の分類への組合せ論的アプローチ
3. 学会等名 2021年度日本数学会東北支部会・特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 上山健太
2. 発表標題 歪2次超曲面に付随する三角圏とグラフの変形操作
3. 学会等名 第65回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 上山健太
2. 発表標題 Triangulated categories associated with skew quadric hypersurfaces
3. 学会等名 OCAMI代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 上山健太
2. 発表標題 非可換Knorrer 周期性について
3. 学会等名 第43回神楽坂代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenta Ueyama
2. 発表標題 Knorrer's periodicity for skew quadric hypersurfaces
3. 学会等名 The Eighth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 毛利出, 上山健太
2. 発表標題 Noncommutative graded Knorrer's periodicity theorem
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 板場綾子, 上山健太
2. 発表標題 Down-up algebraのBeilinson algebraのホッホシルトコホモロジーについて
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenta Ueyama
2. 発表標題 Stable categories of graded Cohen-Macaulay modules over skew quadric hypersurfaces
3. 学会等名 2019 Noncommutative Algebraic Geometry Shanghai Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenta Ueyama
2. 発表標題 Combinatorial study of stable categories of graded CM modules over skew quadrics
3. 学会等名 名古屋大学環論表現論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 上山健太
2. 発表標題 可換でないときの Knorrer 周期性について
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 上山健太
2. 発表標題 Twisted Segre products and noncommutative quadric surfaces
3. 学会等名 第54回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 東谷章弘、上山健太
2. 発表標題 グラフのスイッチングと付随する単体的複体による $(\pm 1)$ 歪多項式環の分類
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kenta Ueyama
2. 発表標題 Examples of smooth noncommutative projective schemes
3. 学会等名 BIRS Workshop: Noncommutative Geometry and Noncommutative Invariant Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 東谷章弘、上山健太
2. 発表標題 行列のスイッチングと付随する単体的複体による歪多項式環の分類
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Kenta Ueyama  <a href="https://sites.google.com/view/ueyama/">https://sites.google.com/view/ueyama/</a></p>
--

6. 研究組織			
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)		備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
中国	杭州師範大学 (Hangzhou Normal University)		
米国	Tennessee Tech University	University of California, Los Angeles	