

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13386

研究課題名（和文）正標数における極小モデル理論

研究課題名（英文）Minimal model program in positive characteristic

研究代表者

田中 公 (Tanaka, Hiromu)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50724514

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：正標数の極小モデル理論に関して研究を行った。特に、非完全体上のデルペッツォ曲面の有界性に関する結果を確立した。呼子氏によって近年導入された準F分裂性について、極小モデル理論の観点から研究を行った。トーリック多様体に関する消滅定理を証明した。古典的に知られているベルティニの定理について、適切な枠組みで定義環がエクセレント環の場合に一般化した。

研究成果の学術的意義や社会的意義  
代数幾何学は可換環論や複素多様体論などと密接に関連した分野であり、歴史的には整数論とも互いに刺激し合いながら発展を遂げてきた。純粋数学の外でも、暗号理論や物理学などへの応用を持つ分野でもある。従って、代数幾何学の基礎理論である極小モデル理論を確立する事は重要である。本研究では、正標数における極小モデル理論に関する結果を確立した。

研究成果の概要（英文）：I studied minimal model program in positive characteristic. In particular, I establish a boundedness result for del Pezzo surfaces over imperfect fields. Recently Yobuko has introduced quasi-F-splitting. I study quasi-F-splitting by the view point of minimal model program. I established a vanishing theorem for toric varieties. I generalise, under suitable setting, a classical Bertini theorem to the case when the base ring is excellent.

研究分野：代数幾何

キーワード：双有理幾何 極小モデル理論 正標数 ファノ多様体

## 1. 研究開始当初の背景

本研究は代数多様体の分類理論に関するものである。代数曲線 (= 1 次元) の分類は荒い意味でリーマンによってなされ、代数曲面 (= 2 次元) の分類は 1900 年代初頭にイタリアにおける代数幾何の研究グループによって、代数曲面の分類が完成された。その後、3 次元以上の代数多様体の分類理論については停滞していたが、森による錐定理が突破口となり、1980 年代に極小モデル理論が爆発的に進展した。これは曲面の分類理論の高次元版とみなすことができる。その後、現在に至るまで標数ゼロの世界における高次元の極小モデル理論は進展し続けている一方で、正標数の世界では小平消滅定理が不成立であることにより長らく進展はなかったが、2010 年代に正標数の極小モデル理論が大きく進展した。本質的には、小平消滅定理によって得られる帰結を F 分裂性によって代替する所が鍵となる。

## 2. 研究の目的

本研究は正標数の極小モデル理論を更に発展させることが目的であった。より具体的には、主にヴィット環やファノ多様体に注目して、肯定的な方向と否定的な方向の両面から研究を進める事が目標であった。前者のヴィット環については、上述の小平消滅定理を代替物にできないか? という事が元々の着想であった。標数ゼロの場合の適切なコホモロジー (ゼロになって欲しいもの) をヴィット環を用いた類似物を考えることでよりゼロになりやすいコホモロジーが得られる。正標数の極小モデル理論でも、実際に 3 次元の場合にこのような現象が観察されていた。本研究の目的の 1 つは、この現象を更に追及して、最終的には正標数でも、標数ゼロの世界と同じような理論が作ることであった。この研究のもう 1 つの目的は正標数のファノ多様体を研究することであった。ファノ多様体は、様々な視点から研究され続けている重要な代数多様体の一群である。1900 年代前半にファノ自身によって研究が創始され、現在では標数ゼロのファノ多様体は、極小モデル理論のみならず、ミラー対称性や K-安定性というトピックにおいて非常の活発に研究されている。極小モデル理論においては特異点を研究することが重要であるが、局所大域原理と呼ばれる原理によって、極小モデル理論において重要な特異点の大域的な対応物として、ファノ多様体が現れる。そこで、正標数においてもファノ多様体を研究することは非常に重要である。実際、正標数特有のファノ多様体が見つかったことによって、極小モデル理論的に新しい現象がいくつも発見されてきた。この研究のもう 1 つの目的として、正標数における新たなファノ多様体を発見することや正標数のファノ多様体に対する一般的な結果を確立することを目的としていた。

## 3. 研究の方法

新型コロナウイルスが蔓延する前までは、パソコン等で既存の結果について調査しつつ、一人で問題を考えたり、時には専門家と議論をしたりしながら研究を進めていた。2020 年以降は主に Zoom およびメール等によって代替された。対面による議論よりは非効率だったが、一方で、タブレット端末を含め、新たな電子機器を導入したりして、研究環境を整備し、研究を効率化した。本研究の最終年度には、コロナ前の研究に戻りつつはあったが、完全には戻らなかった。

## 4. 研究成果

元々、標数 7 以上の 3 次元の  $klt$  特異点がヴィット有理的であるという定理を証明していたが、この結果を更に推し進めて、3 次元のネーデル型の消滅定理をヴィット環を用いて確立した (中村氏との共同研究)。この帰結として、Kollar-Shokurov 連結性定理を標数が 7 以上で 3 次元の場合に完全な形まで一般化することに成功した。証明では、有限体の場合に帰着してから有理点の個数を数えることによって消滅定理を確立するという新しい手法を用いた。また、F 分裂性をヴィット環を用いて一般化した準 F 分裂性についての研究を始めた。準 F 分裂性は最近、呼子氏によって導入された新しい概念であり、未知の部分が多いものであったが、極小モデル理論との関係性 ( $klt$  特異点・ファノ多様体) について、とりわけ 3 次元までの場合について詳細に研究を行った。2023 年 4 月現在も本研究は継続中であるが、既に得られたいくつかの結果については、arXiv にプレプリントとして発表した (河上氏、高松氏、Witaszek 氏、呼子氏、吉川氏との共著)。特に、1 次元のログファノ曲線や 2 次元の  $klt$  特異点は常に準 F 分裂であることを証明することができた。また、正標数のファノ多様体に関しては、非完全体上の幾何学的に整なデルペッツォ曲面についての有界性を証明した。3 次元の del Pezzo fibration に対して、捩れ線束の捩れ指数の具体的な上界などを与えた。既に自明でない捩れ線束の存在は知られていたが、その捩れ指数がどれ程悪くなりうるかは未知であったが、del Pezzo fibration の場合に結果を確立できた。その他にも、トーリック多

様体の消滅定理も確立した。より具体的には、射影トーリック多様体とそれ上の  $Q$ -因子に対して、川又-Viehweg 消滅定理を確立した。因子がトーラス不変の場合には既知であったが、その仮定を外すことに成功した。証明は、極小モデルプログラムを走らせるという一見奇妙な証明手法である。また、ベルティニの定理の一般化なども確立した。そこでは、体の純超越拡大を一般の環に拡張した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計18件（うち査読付論文 18件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tanaka Hiromu	4. 巻 73
2. 論文標題 Invariants of algebraic varieties over imperfect fields	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 471 ~ 538
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj.20200611	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Hiromu	4. 巻 294
2. 論文標題 On $p$ power freeness in positive characteristic	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 1968 ~ 1976
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.202000118	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Hiromu	4. 巻 295
2. 論文標題 Abundance theorem for surfaces over imperfect fields	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 595 ~ 622
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-019-02345-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cascini Paolo, Tanaka Hiromu	4. 巻 121
2. 論文標題 Relative semi ampleness in positive characteristic	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 617 ~ 655
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/plms.12323	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tanaka Hiromu	4. 巻 20
2. 論文標題 Pathologies on Mori fibre spaces in positive characteristic	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze	6. 最初と最後の頁 1113 ~ 1134
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sannai Akiyoshi、Tanaka Hiromu	4. 巻 13
2. 論文標題 Infinitely generated symbolic Rees algebras over finite fields	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 1879 ~ 1891
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/ant.2019.13.1879	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Gongyo Yoshinori、Nakamura Yusuke、Tanaka Hiromu	4. 巻 21
2. 論文標題 Rational points on log Fano threefolds over a finite field	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3759 ~ 3795
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JEMS/913	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Yusuke、Tanaka Hiromu	4. 巻 156
2. 論文標題 A Witt Nadel vanishing theorem for threefolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 435 ~ 475
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/s0010437x1900770x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiromu Tanaka	4. 巻 68
2. 論文標題 Minimal model program for excellent surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)	6. 最初と最後の頁 345-376
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Paolo Cascini, Hiromu Tanaka	4. 巻 4
2. 論文標題 Smooth rational surfaces violating Kawamata-Viehweg vanishing	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 162-176
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-016-0127-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Paolo Cascini Paolo, Hiromu Tanaka, Jakub Witaszek	4. 巻 7
2. 論文標題 Klt del Pezzo surfaces which are not globally F-split	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 2135-2155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnw300	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiromu Tanaka	4. 巻 41
2. 論文標題 Zariskian adic spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 652-695
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2996/kmj/1540951258	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiromu Tanaka	4. 巻 744
2. 論文標題 Behavior of canonical divisors under purely inseparable base changes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 237-264
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2015-0111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Paolo Cascini, Hiromu Tanaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Purely log terminal threefolds with non-normal centres in characteristic two	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics(印刷中)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiromu Tanaka	4. 巻 47
2. 論文標題 Infinite dimensional excellent rings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 482-489
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2018.1477952	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akiyoshi Sannai, Hiromu Tanaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Infinitely generated symbolic Rees algebras over finite fields	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebra and Number Theory(印刷中)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Hiromu	4. 巻 -
2. 論文標題 Pathologies on Mori fibre spaces in positive characteristic	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze(印刷中)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.201712_007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenta Hashizume, Yusuke Nakamura, Hiromu Tanaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Minimal model program for log canonical threefolds in positive characteristic	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Research Letters(印刷中)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計16件 (うち招待講演 16件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On Mori fibre spaces in positive characteristic
3. 学会等名 Workshop on birational geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 Pathological examples in minimal model program of positive characteristic
3. 学会等名 Arithmetic algebraic geometry and mathematical physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 Pathological examples in minimal model program of positive characteristic
3. 学会等名 National Taiwan University-The University of Tokyo, 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On Mori fibre spaces in positive characteristic
3. 学会等名 Zoom in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 Del Pezzo fibrations in positive characteristic
3. 学会等名 Del Pezzo surfaces and Fano varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On Mori fibre spaces in positive characteristic
3. 学会等名 ファノ多様体及び関連する代数幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On Mori fibre spaces in positive characteristic
3. 学会等名 Tokyo-Seoul Conference in Mathematics 2019 - Algebraic Geometry - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 Rational points and minimal model program in positive characteristic
3. 学会等名 RIMS Symposia: Rational Points on Higher Dimensional Varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On Mori fibre spaces in positive characteristic
3. 学会等名 Algebraic and Arithmetic Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 正標数の3次元 klt 特異点の強 F-正則性について
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On log Fano varieties in positive characteristic
3. 学会等名 London-Tokyo Workshop in Birational Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 Rational points for Fano varieties over finite fields and vanishing theorems for Witt vector cohomologies
3. 学会等名 東北大学代数幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On varieties of Fano type in positive characteristic
3. 学会等名 Modern Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On minimal model program in positive characteristic
3. 学会等名 代数幾何学城崎シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On varieties of Fano type in positive characteristic
3. 学会等名 2018 Fall Program of Moduli Spaces and Varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田中公
2. 発表標題 On Witt analogues of the Kodaira vanishing theorem
3. 学会等名 Algebraic Geometry in Positive Characteristic and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------