

令和 5 年 4 月 5 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13388

研究課題名（和文）K安定性と極小モデル理論

研究課題名（英文）K-stability and minimal model program

研究代表者

藤田 健人 (Fujita, Kento)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40779146

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：偏極代数多様体、特にファノ多様体のK安定性を、極小モデル理論を背景とする双有理幾何学的な視点で考察した。ファノ多様体のK安定性の判定法として強力な「付値判定法」を推し進めた Abban-Zhuangの理論を用いるなどすることで、Araujo, Castravet, Cheltsov, Kaloghiros, Martinez-Garcia, Shramov, Suess, Viswanathan との共同で、全ての非特異3次元ファノ多様体の族の一般元がいつK安定かどうかを完全に決定することに成功し、本として出版予定である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

与えられたファノ多様体にいつケーラー・アインシュタイン計量が存在するかどうかを決定するのはカラビの問題と呼ばれ、これまで非常に難しいとされた。近年この問題はK安定性なる代数的条件と同値であることが証明されたが、それでもなお具体的なファノ多様体がいつK安定かどうか判定することは困難であった。付値判定法やAbban-Zhuangの理論の発展やそれらを組み合わせた公式を導出し、一般元という条件付きだが3次元でのカラビの問題を解決できたのは学術的意義は大きい。また本として出版する予定なので、理論の編纂は社会的意義も大きい。

研究成果の概要（英文）：I considered K-stability of polarized varieties, especially of Fano varieties, from the viewpoint of birational geometry, e.g., minimal model program. We already have a valuative criterion for K-stability of Fano varieties, and recently Abban-Zhuang introduced a strong theory to test K-stability of Fano varieties. Using those valuative-type criteria and so on, together with Araujo, Castravet, Cheltsov, Kaloghiros, Martinez-Garcia, Shramov, Suess, Viswanathan, we could completely check whether a general member of each class of smooth Fano threefold is K-stable or not. Our result will be published as a forthcoming book.

研究分野：代数幾何学

キーワード：K安定性 極小モデル理論 Fano多様体

1. 研究開始当初の背景

ファノ多様体の K 安定性問題は、ケーラー・アインシュタイン計量存在問題（いわゆるカラビの問題）と同値な問題であることが知られている。故に K 安定性を理解することは重要な問題であるが、近年まで一般に（ファノ多様体であっても） K 安定性の判定は難しいとされてきた。近年 Li と独立に、ファノ多様体の K 安定性の「付値判定法」が開発されたが、それでもなお（特に肯定的な方向で） K 安定性を示すことは簡単ではなかった。他方、この数年の一般論の急速な進展で、Abban-Zhuang のトリックや、Liu-Xu-Zhuang による「最適退化予想」の解決など、多くのブレイクスルーが見られた。これらの最近の一般論の進展を用いることで、具体的なファノ多様体の K 安定性を決定できるような手法を開発し、そして実際に様々な具体的なファノ多様体に応用することができることが求められていた。

2. 研究の目的

これまで培われた多くの一般論を、実際に計算可能な理論に昇華することが目的の一つだった。また「付値判定法」の改良や、その他双有理幾何的な見地での K 安定性の理解の深化も目的の一つである。より具体的な目標としては、全ての非特異 3 次元ファノ多様体のカラビの問題を解決することを大きな目標の一つに挙げた。実際、一般元に限定したが、すべての上記メンバーの K 安定性を考察した。

3. 研究の方法

極小モデル理論を中心とした、双有理幾何学的な視点でファノ多様体の K 安定性を考察した。より具体的には、Abban-Zhuang が考察したように、次数付き完備線型系のみならず「多重」次数付き線型系にまでデルタ不変量の理論を拡張したうえで局所デルタ不変量の評価を行うことが K 安定性にとって重要であることが分かっていたので、その方向で更に理論を推し進めた。まずこれらの局所デルタ不変量の評価はオクンコフ体の重心の言葉で明瞭に言い換えられることに気づき、このアイデアを進めることでファノ多様体や曲面上の因子たちのザリスキー分解で計算できる体積関数の然るべき積分値で局所デルタ不変量を評価できることを 9 人での共同研究にて明らかにした。詳しく述べるなら、ファノ多様体の K 安定性は「各店に対し如何に局所デルタ不変量の小さな部分多様体の列をファノ多様体の上空に校正できるか」という問題に帰着した。

4. 研究成果

前述したように、ファノ多様体の K 安定性の判定法として強力な「付値判定法」を推し進めた Abban-Zhuang の理論を用いるなどすることで、Araujo, Castravet, Cheltsov, Kaloghiros, Martinez-Garcia, Shramov, Suess, Viswanathan との 9 人での共同研究で、最終的に全ての非特異 3 次元ファノ多様体の族の一般元がいつ K 安定かどうかを完全に決定することに成功した。つまりこれは一般元に限定しているとはいえ 3 次元ファノ多様体に関するカラビの予想を解決したことを意味し、意義は大きいといって良いであろう。この結果は本として編纂し、出版が決定している。

一般元に限定せず全ての元についてはどうなのかという問いは未だに残っているが、これについても最近 Cheltsov, Desinova, 岸本, Park, 岡田との複数の共同研究にて、多くの残されたファノ多様体の族について「全ての」メンバーが K 安定であることを証明し、3 次元ファノ多様体のカラビの問題の完全解決も非常に近いところに来ているのではないのかと考えている。具

体的な K モジュライ等考えるべき問題は残されているが、この研究課題を通して、ファノ多様体の K 安定性の理論の進展に一定以上の貢献ができたのではなかろうか、そして多くの共同研究議論により視野が広がったのではなかろうか、と考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 8
2. 論文標題 Fano manifolds with many free divisors	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 909 ~ 931
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-022-00559-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 -
2. 論文標題 On K-Stability for Fano Threefolds of Rank 3 and Degree 28	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnac190	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 30
2. 論文標題 K-stability of log Fano hyperplane arrangements	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 603 ~ 630
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/783	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 45
2. 論文標題 On K-Polystability for Log Del Pezzo Pairs of Maeda Type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 943 ~ 965
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-020-00388-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 18
2. 論文標題 K-STABILITY OF FANO MANIFOLDS WITH NOT SMALL ALPHA INVARIANTS	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 519 ~ 530
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1474748017000111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 2019
2. 論文標題 A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal fuer die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 309 ~ 338
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2016-0055	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 59
2. 論文標題 Uniform K-stability and plt blowups of log Fano pairs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 399 ~ 418
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2019-0012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 31
2. 論文標題 Notes on K-Semistability of Toric Polarized Varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Springer INdAM Ser.	6. 最初と最後の頁 37 ~ 51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-13158-6_3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 5
2. 論文標題 The generalized Mukai conjecture for toric log Fano pairs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 858 ~ 871
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-018-0302-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kento Fujita	4. 巻 140
2. 論文標題 Optimal bounds for the volumes of Kahler-Einstein Fano manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 391--414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2018.0009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kento Fujita and Yuji Odaka	4. 巻 70
2. 論文標題 On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 511--521
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Kento	4. 巻 58
2. 論文標題 On Uniform K-Stability for Some Asymptotically log del Pezzo Surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 227-279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/58-2-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 17件 / うち国際学会 15件）

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 第27回複素幾何シンポジウム（オンライン）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 Birational Geometry Seminar, National Center for Theoretical Sciences (online)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 Algebraic Geometry Seminar, Center for Complex Geometry (online)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 Algebraic Geometry Seminar, Yau Mathematical Sciences Center (online)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 K-stability of log Fano hyperplane arrangements
3. 学会等名 Kähler-Einstein metrics and degenerations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 Toward criteria for K-stability of log Fano pairs
3. 学会等名 Birational Geometry and Fano varieties, dedicated to V. Iskovskikh (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The generalized Mukai conjecture for toric log Fano pairs
3. 学会等名 ファノ多様体及び関連する代数幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The generalized Mukai conjecture for toric log Fano pairs
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Geometry, Xiamen University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 On the uniform K-stability for some asymptotically log del Pezzo surfaces
3. 学会等名 Algebraic Geometry in Auckland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 Openness results for uniform K-stability
3. 学会等名 Algebraic Geometry in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 Toward criteria for K-stability of log Fano pairs
3. 学会等名 Connection for Algebraic Geometers (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 Openness results for uniform K-stability
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Moduli Theory (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 Recent Advances in Classical Algebraic Geometry (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 IBS-CGP 10th Anniversary Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 MPS conference on higher dimensional geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kento Fujita
2. 発表標題 The Calabi problem for Fano threefolds
3. 学会等名 Birational Geometry and Kstability of Fano varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>The Calabi problem for Fano threefolds https://archive.mpim-bonn.mpg.de/id/eprint/4589/1/mpim-preprint_2021-31.pdf</p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------