

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 23 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13389

研究課題名（和文）標準ケーラー計量とモジュライ空間

研究課題名（英文）Canonical Kahler metrics and Moduli spaces

研究代表者

尾高 悠志（Odaka, Yuji）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：30700356

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：まずアーベル多様体やK3曲面の場合の標準計量のコンパクトな極限に関わる、moduli空間の非代数幾何的なコンパクト化の理論を対称空間の理論などを用いて大島芳樹氏と大きく発展させることができた。その後、主要な興味であったK3曲面のIII型退化のみならず、後にII型退化の場合にも理論を精密化した（本多-Sun-Zhang, 大島, Alexeev-Brunyate-Engel氏らの仕事に起因関連する。）さらに、コロナ禍の間には、広義Calabi-Yau多様体のKモジュライやそのコンパクト化、K半安定退化について理論を発展させるべく、様々な観点から成果を得た。他に自分の学生たちとの研究成果も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

広義Calabi-Yau多様体、そのmoduli空間や標準計量の挙動は、代数幾何学や微分幾何はもちろん、幾何学においても数理物理学においても、時折数論幾何学においても調べられる古典的で重要な対象である。大島氏との仕事や、この数年間に考えた弱K-モジュライ理論の発展は、これらの理論の新しい礎につながっていくことが期待される。

研究成果の概要（英文）：Firstly, in a joint work with Yoshiki Oshima, we largely developed the understanding of our non-algebro-geometric compactification of moduli spaces which is related to compact limits of canonical metrics, in the case of abelian varieties, by using theories of symmetric spaces. Later, we further developed the theory also in the case of type II degeneration of K3 surfaces, not only for the case of type III degenerations which was where our primary interest lie then. (This was inspired by the works of Honda-Sun-Zhang, Oshima, Alexeev-Brunyate-Engel etc.) Further, I obtained various results in the direction to develop K-moduli theories for Calabi-Yau varieties (in the most generalized sense). I also obtained other results with my PhD students.

研究分野：代数幾何学、moduli空間

キーワード：モジュライ空間 K3曲面 コンパクト化 Ricci-平坦計量 K安定性 トロピカル幾何学 非アルキメデス幾何学 局所対称空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

偏極射影代数多様体の K 安定性理論とそれに関するケーラー幾何学の理論を発展させて、moduli 空間やその他に応用を与えるという研究テーマは私が研究開始当初から持っていたものである。その目論見は標準偏極射影代数多様体、ファノ多様体について、初期からの仕事とも関連して、 K 安定性や K モジュライは大きな発展を遂げた。その一方で K 自明な複素多様体については同様に、ないし、より古典的な研究対象であるにもかかわらずいまだに多くの未解決問題があった。他にも K 安定性理論の数論化・アラケロフ幾何学的設定での方向性も研究代表者が 2015 年ほどに部分的に創始したまま大きな進展はあまりない状況であった。 K 安定を用いた双有理幾何学を用いた研究手法が徐々に世界に広まっていく一方で、それとさらに多くの他分野との関連性も見えてきた。

2. 研究の目的

標準偏極射影代数多様体、ファノ多様体についての K 安定性や K モジュライ理論を発展させる際に以前得た蓄積も元に、 K 自明な複素多様体についても標準計量の極限、 K 安定性を考えるという方向性を主に考えた。 K 安定性理論の数論化で導入した数論的 Yau-Tian-Donaldson 予想もより多くの多様体に確認したいと考えた。

3. 研究の方法

従来通り双有理的な代数幾何学を、代数多様体の退化のモデルや moduli 空間、その全空間などに適応すること

やケーラー幾何学の理論を用いることはもちろん、一方でトロピカル幾何学や対称空間の理論、アラケロフ幾何学の手法を取り入れて取り組んだ。

4. 研究成果

(1) まずアーベル多様体や $K3$ 曲面の場合の標準計量のコンパクトな極限に関わる、moduli 空間の非代数幾何的なコンパクト化の理論を大きく発展させることができた。これは主に表現論を専門とする大島芳樹氏（当時大阪大学情報学研究科、途中東京大学数理科学研究科に異動）との何年にもわたる共同研究の成果である。

特に、以前扱っていた代数曲線やアーベル多様体の場合と違って、 $K3$ 曲面や高次元の超ケーラー多様体の上の超ケーラー計量の、moduli 空間の境界における漸近挙動は具体的に書けないのが大きな難点であったがそれを突破する他分野と組み合わせたアイデアが進展した次第である。つまり、具体的に標準ケーラー計量が記述できないにもかかわらず、それらの崩壊極限を貼り付ける形でモジュライ空間の系統的なコンパクト化が同様に得られるということは Gromov のプレコンパクト性定理から従うのであるという状況であるのでそのコンパクト化の素性は本来非常に非自明な問題である。

今回の我々の研究成果によって、さらにそれが 1960 年代の佐武一郎の局所対称空間のコンパクト化であって代数的ではないものと同定することができたのだが、それは佐武の理論の一部に新たな微分幾何学的な意味づけを与えることでリー理論や表現論との関連が見つかったということである。そしてそれとは別に上記の佐武コンパクト化が、これまた別分野であるトロピカル幾何学的なコンパクト化であるモーガンシャーレンコンパクト化として解釈できるという整合性も一般の志村多様体に対して証明することができた。これらの応用として Kontsevich-Soibelman らの有名な予想を、曲面の場合に大幅にモジュライ理論的に拡張しながら解決することにも成功した。

その後、これらの成果は 165 ページほどの日本数学会出版のモノグラフとして出版することができた。さらにその後、上記モノグラフの 4 章で扱われて当時の主要な関心であった、偏極射影 $K3$ 曲面の III 型退化のみならず、後に偏極つき II 型退化の場合にも理論を精密化することができた。これは Monge-Ampere 測度の極限を具体的な PL 関数及び moduli 空間のコンパクト化の境界成分によって具体的に記述し切ってしまうというものである。この仕事は、そうした PL 関数の存在を抽象的な存在定理として確立した微分幾何学における本多-Sun-Zhang [HSZ] やその具体的な例を与えた [HSVZ] の論文をはじめ、大島、Alexeev-Brunyate-Engel 氏らの楕円 $K3$

曲面の代数幾何学的なコンパクト化の記述の仕事[ABE]にも大きく影響されていて、これらは他分野をつなぐ形で深く、しかし直接的に関連している。

上記これらの仕事は微分幾何のアイデアから、標準 Kahler 計量（の極限）に注目した新しいコンパクト化を論じるものである。不変量としての側面を取り出すと、このアプローチは III 型（偏極つき）退化族に対して整アフィン構造つき球面を、II 型（偏極つき）退化については線分上の区分線形な凸関数 f を半明示的に対応させる事に繋がっている。ここで f の形状はルート格子の言葉で記述される。またこれらは不思議と “元来の” 代数幾何的コンパクト化とも何層もの繋がりを見せる。

(2) さらに、コロナ禍の間には、広義 Calabi-Yau 多様体の K モジュライやそのコンパクト化、K 半安定退化について理論を進展させるべく、様々な観点から成果を得た。上記の K3 曲面の II 型退化の研究もこの発展には大きな役に立った。

特に、あらゆる対数的末端特異点を許容した偏極広義 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間は Birkar 氏の最近の結果を用いることでその有界性を確立させ、K モジュライとして特徴付けられてそれがさらに Weil-Petersson 計量の完備化であることをそれまでの多くの先行研究に基づいて証明した。

そうして得られた代数幾何学的な擬射影的な部分 compact 化を、さらに射影的なコンパクト化までしてその境界上に半対数的標準的な偏極広義 Calabi-Yau 多様体の族をのせようとする目論見は代数幾何で古典的な問題の自然な延長にあり、それを私は「弱 K モジュライ」という呼び名で新しく K 安定理論の文脈で考え直した。Alexeev-Engel [AE]の最近の仕事などで明らかになってきたようにそうしたコンパクト化に標準性は期待できないのであるが、[AE]の仕事の本質的な部分を再証明するというも行なった。

(3)例えばその過程においては志村多様体の代数的なコンパクト化についても極小モデル理論の観点からアプローチし、Looijenga や Ash-Mumford-Rapoport-Tai による準古典的な志村多様体のコンパクト化を対数的な極小モデルとして特徴づけられることを橋詰健太氏の極小モデル理論の結果に基づいて証明した。

同時に弱 K モジュライがなぜ対数的な極小モデルになりやすいのかを、混合ホッジ構造の許容変動の理論と藤野-Svaldi の錐定理を援用して証明した。

(4) 他に（当時）大学院生たちの指導の過程で、共同の関連研究成果も得た。

(4a) 前田洋太氏とは、幾らかの具体的な志村多様体において、Borcherds 積やその制限として得られる保形形式の零点と極を確認することで、その佐武コンパクト化の Fano 性（あるいは Calabi-Yau 多様体、対数標準モデル）であることなどを証明し、その枠組みも整理した。

(4b) 後藤慶太氏とは彼の研究していたアーベル多様体の有限商の場合の非アルキメデス SYZ ファイブレーションと、通常の SYZ ファイブレーションの族が、ハイブリッド Berkovich 幾何学において連続的につながることを証明し、またそれと同様の枠組みにおいて非アルキメデス CY 計量も CY 計量の極限としてかけるということを一様に予想してそのこともアーベル多様体の有限商の場合に解決した。

(4c) 服部真史氏とは、彼の導入した特殊 K 安定性という概念の発展に基づいてその場合において数論的な Yau-Tian-Donaldson 予想（私が 2015 年に K 安定性の数論化の論文の中で提唱）をある形で解決することができた。

参考文献

[ABE] V.Alexeev, A.Brunyate, P.Engel,
Compactifications of moduli of elliptic K3 surfaces: stable pairs and toroidal, arXiv:2002.07127v3. Geometry and Topology

[AE] V. Alexeev, P. Engel, Compact moduli of K3 surfaces, Ann. of Math.

[HSVZ] H.-J.Hein, S.Sun, J.Viaclovsky, R.Zhang,
Nilpotent structures and collapsing Ricci-flat metrics on K3 surfaces,
arXiv:1807.09367. Journal of Amer. Math. Soc.

[HSZ]

S.Honda, S.Sun, R.Zhang,

A note on the collapsing geometry of hyperKähler four manifolds,
Sci. China Math. 62, 2195-2210 (2019).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Yuji Odaka	4. 巻 31
2. 論文標題 Tropical Geometric Compactification of Moduli, I - Mg case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Moduli of K-stable Varieties : Springer INdAM Series, Springer International Publishing	6. 最初と最後の頁 75-101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-13158-6_5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Odaka	4. 巻 58
2. 論文標題 Canonical Kahler metrics and arithmetics: generalizing Faltings heights	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyoto journal of mathematics	6. 最初と最後の頁 243-288
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Odaka, Yoshiki Oshima	4. 巻 94
2. 論文標題 Collapsing K3 surfaces and Moduli compactification	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 81-86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Odaka, Kento Fujita	4. 巻 70
2. 論文標題 On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tohoku Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 511-521
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Odaka	4. 巻 29
2. 論文標題 Polystable Log Calabi-Yau Varieties and Gravitational Instantons	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Sciences The University of Tokyo	6. 最初と最後の頁 1-50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Odaka	4. 巻 247
2. 論文標題 PL density invariant for type II degenerating K3 surfaces, Moduli compactification and hyperKahler metrics	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nagoya Math Journal	6. 最初と最後の頁 574 - 614
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2021.13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Odaka	4. 巻 8
2. 論文標題 Degenerated Calabi-Yau varieties with infinite components, moduli compactifications, and limit toroidal structures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1105-1157
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-022-00562-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Yuji Odaka
2. 発表標題 Collapsing hyperKahler metrics and moduli compactifications for K3 surfaces, II
3. 学会等名 Japan-European symposium on Symplectic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuji Odaka
2. 発表標題 Calabi-Yau/Kahler-Einstein metrics, Collapsing K3 surfaces and Generalized Faltings heights
3. 学会等名 Arithmetic algebraic geometry and mathematical physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuji Odaka
2. 発表標題 On (various) geometric compactifications of moduli of K3 surfaces
3. 学会等名 AGEA seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuji Odaka
2. 発表標題 On compactifying moduli of K-trivial varieties
3. 学会等名 Zoom algebraic geometry seminar (オンライン) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuji Odaka
2. 発表標題 Collapsing hyperKahler manifolds and Satake compactification of adjoint type.
3. 学会等名 Complex Geometry and Lie group (オンライン) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuji Odaka, Yoshiki Oshima
2. 発表標題 Collapsing of Kahler-Einstein metrics and Satake compactifications of moduli spaces I, II (joint talk)
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 尾高悠志
2. 発表標題 Collapsing Ricci-flat Kahler metrics and Moduli compactification
3. 学会等名 第24回複素幾何シンポジウム(金沢) 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 尾高悠志
2. 発表標題 Tropical geometric compactification of moduli of K3 surfaces
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Moduli Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 尾高悠志
2. 発表標題 On Moduli Compactifications, K-Stability and Canonical Metrics
3. 学会等名 OPPENHEIM lecture ワークショップ, RECENT PROGRESS IN ALGEBRAIC GEOMETRY, シンガポール国立大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 尾高悠志
2. 発表標題 Collapsing of compact hyperKähler metrics, PL limit density function on intervals, and moduli compactification
3. 学会等名 パリ IMJ 解析幾何セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Yuji Odaka, Yoshiki Oshima	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Math Society of Japan	5. 総ページ数 165
3. 書名 Collapsing K3 surfaces, Tropical geometry and Moduli compactifications of Satake, Morgan-Shalen type	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関