

令和 3 年 6 月 2 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2020

課題番号：18K13390

研究課題名（和文）アファインヤングリアンの表現論と可積分系

研究課題名（英文）Representation theory of affine Yangians and integrable systems

研究代表者

小寺 諒介（Kodera, Ryosuke）

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：20634512

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：アファインヤングリアンの構造論および表現論について研究した。また、関連する代数系の表現論について研究した。

アファインヤングリアンについては、evaluation写像の性質を調べ、余積と組み合わせることで長方形型アファインW代数への代数射を構成したのが大きな成果である。アファインW代数は可積分系と密接に関係しているため、この代数射を通じてアファインヤングリアンの表現論を可積分系の研究に応用することが可能になると期待している。

関連する代数系については次の成果を得た。トロイダルLie代数のレベル1 Weyl加群の指標を求めた。(q,Q)カレント代数の有限次元既約表現をqが1の冪根でない場合に分類した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究によってアファインヤングリアンの構造論の理解が進んだことに伴って、長方形型アファインW代数との関係が明らかになった。特に、アファインヤングリアンのテンソル積表現と長方形型アファインW代数の放物誘導が対応することを示したことで、テンソル積表現の研究の重要性が再確認された。この成果は、今後可積分系の研究への応用を考えるうえでも重要だと考えている。

トロイダルLie代数のWeyl加群の研究は、アファインヤングリアンの表現論の理解のために役立つことが期待されるとともに、それ自体が特殊函数論的な観点からも興味深い。本研究の成果はWeyl加群の研究の第一歩となるものである。

研究成果の概要（英文）：We studied the structure theory and the representation theory of affine Yangians. We also studied the representation theory of related algebras.

For the affine Yangians, we studied properties of the evaluation map, and constructed algebra homomorphisms to affine W-algebras of rectangular type by composing it with the coproduct. They are significant results. Since the affine W-algebras are closely related to integrable systems, it is expected that we can apply the representation theory of the affine Yangians to the study of the integrable systems via the homomorphisms.

The following results were obtained as the studies on related algebras. We derived the characters of the level 1 Weyl modules of toroidal Lie algebras. We classified the finite-dimensional irreducible representations of (q,Q)-current algebras when q is not a root of unity.

研究分野：表現論

キーワード：アファインヤングリアン 表現論 可積分系 W代数 トロイダルLie代数 シフト量子アファイン代数

1. 研究開始当初の背景

数理論理学の研究の中で、様々なモデルの背後にある代数系として、アファイン Lie 代数・量子群・W 代数が発見された。このような豊富な対称性を持つモデルは可積分系と呼ばれる。可積分系の研究と背後にある代数系の表現論は密接に関連し、互いに影響を与える形で発展してきた。

ヤンギアンは Drinfeld によって導入された量子群の一種で、ある種の格子模型の対称性を記述する。一方で、格子模型とは別の数理論理学モデルの中で、アファイン Lie 代数とヤンギアンの対称性を持つようなものが知られていた。研究代表者は、本研究課題に取り組む以前に、典型的な例であるスピン Calogero-Sutherland モデルに対して、二つの代数の対称性がより大きなアファインヤンギアンの対称性に拡張されることを示した。

アファインヤンギアンは、Drinfeld によって見いだされたヤンギアンの定義関係式を拡張して定義された代数系だが、研究の動機としての可積分系との関係は薄く、表現論も満足に整備されていない状況である。このような背景を踏まえて、アファインヤンギアンの表現論の整備と発展、およびその可積分系の研究への応用を目標として研究を行った。

2. 研究の目的

アファインヤンギアンの構造論と表現論について調べ、可積分系の研究に応用する。その際、アファインヤンギアンの余積とそれによって得られるテンソル積表現に着目し、可積分系の文脈におけるテンソル積表現の役割についての理解を深める。

3. 研究の方法

国内外の研究集会に参加して情報を集めるとともに、参加者と議論して研究の手法や方向性を探っていった。加えて、2018-2019 年度は神戸大学の研究セミナーに関連する研究者を招聘して講演を依頼し、周辺の研究分野についての理解を深めた。

2020 年度は世界的な感染症の流行により、研究のための出張を一切しなかった。代替策として、オンライン研究集会に参加するとともに、ビデオ会議システムを使って研究者と議論することで研究活動が滞らないような措置をとった。

4. 研究成果

- (1) アファインヤンギアンの evaluation 写像について研究を行った。A 型ヤンギアンには evaluation 写像が存在し、その表現論を詳しく調べる重要な道具となっている。アファイン A 型の場合には Guay が類似の写像を導入していたが、その証明は省略されていた。私はこの証明を書き下す過程で、Guay の定義した写像が well-defined になるためにはアファインヤンギアンの二つのパラメータの間に代数的な関係式が必要なことに気づき、詳細を論文にまとめた。この事実は A 型ヤンギアンには見られなかった新しい現象である。論文では、さらに evaluation 写像を使って構成した表現の最高ウェイトを計算した。
- (2) ヤンギアンへのブレイド群作用について調べ、余積との整合性を証明した。また、ブレイド群作用を使って(1)で述べた evaluation 写像の全射性を証明した。
- (3) トロイダル Lie 代数の表現で、最高ウェイト条件と可積分条件を課して定義されるもの (Weyl 加群)の研究を行った。トロイダル Lie 代数は、アファインヤンギアンのパラメータを特殊化したものと関係し、アファインヤンギアンの表現の定義関係式を決定するために、その特殊化の表現を調べるのは常套手段である。結果として、レベルが 1 の場合の Weyl 加群の指標を求め、それがアファインヤンギアンの Fock 表現と同じサイズを持つという観察を得た。
- (4) 和田堅太郎氏 (信州大学) との共同研究: cyclotomic q -Schur 代数の研究を動機として和田が定義した (q, Q) カレント代数と、別の動機から Finkelberg-Tsymbaliuk が研究していたシフト量子アファイン代数との関係を明らかにした。この結果を使い、 q が 1 の冪根でない場

合の (q, Q) カレント代数の有限次元既約表現を分類した .

- (5) 上田衛氏 (京都大学) との共同研究 : アファインヤングリアンと長方形型アファイン W 代数との関係について研究した . アファインヤングリアンの余積と evaluation 写像を組み合わせることで長方形型アファイン W 代数への代数射を構成し , アファインヤングリアンの余積と長方形型アファイン W 代数の放物誘導を関係づけることができた .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ryosuke Kodera	4. 巻 368
2. 論文標題 Appendix to Syu Kato and Sergey Loktev: A Weyl module stratification of integrable representations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 113-141
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03327-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Joel Kamnitzer, Ryosuke Kodera, Hiraku Nakajima, Ben Webster, and Alex Weekes	4. 巻 23
2. 論文標題 Appendices to Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima: Coulomb branches of 3d $N=4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Theoretical and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 75-166
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/ATMP.2019.v23.n1.a3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ryosuke Kodera	4. 巻 24
2. 論文標題 On Guay's evaluation map for affine Yangians	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 253-267
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10468-019-09945-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ryosuke Kodera	4. 巻 55
2. 論文標題 Affine Yangian action on the Fock space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 189-234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/55-1-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryosuke Kodera	4. 巻 23
2. 論文標題 Higher level Fock spaces and affine Yangian	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 939-962
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-018-9491-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryosuke Kodera, Hiraku Nakajima	4. 巻 98
2. 論文標題 Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 String-Math 2016, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 49-78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/pspum/098/03	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryosuke Kodera	4. 巻 15
2. 論文標題 Braid group action on affine Yangian	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 SIGMA Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2019.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryosuke Kodera	4. 巻 110
2. 論文標題 Level one Weyl modules for toroidal Lie algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 3053-3080
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-020-01321-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryosuke Kodera, Kentaro Wada	4. 巻 570
2. 論文標題 Finite dimensional simple modules of (q,Q) -current algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 470-530
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.11.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 Level one Weyl modules for toroidal Lie algebras
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryosuke Kodera
2. 発表標題 Affine Yangians and rectangular W-algebras of type A
3. 学会等名 Workshop on 3d Mirror Symmetry and AGT Conjecture (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 Level one Weyl modules for toroidal Lie algebras
3. 学会等名 表現論シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 Level one Weyl modules for toroidal Lie algebras
3. 学会等名 Arithmetic Geometry and Representation Theory (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 (q, Q)-current algebras and shifted quantum affine algebras
3. 学会等名 南大阪代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 Braid group action on affine Yangian
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 On Guay's evaluation map for affine Yangians
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 Braid group action on affine Yangian
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「組合せ論的表現論の諸相」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 Affine Yangians and integrable systems
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会 無限可積分系セッション特別講演（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小寺諒介
2. 発表標題 Affine Yangians and rectangular W-algebras
3. 学会等名 表現論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Ryosuke Kodera http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~koder/index.html Koder Ryosuke http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~koder/index-j.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------