

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2023

課題番号：18K13392

研究課題名（和文）射影直線上の反復積分の研究

研究課題名（英文）Research on the iterated integrals on the projective line

研究代表者

広瀬 稔 (Minoru, Hirose)

名古屋大学・高等研究院(多元)・特任助教

研究者番号：70773969

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：多重ゼータ値をはじめとした射影直線上の反復積分は、周期と呼ばれる数のクラスの最も基本的な場合の一つであり、非常に美しい構造を持ちながらも、未だに未知な部分が多く、大変興味深い対象である。その中心的な研究テーマの一つは、それらが満たす代数的な等式である。本研究では、この射影直線上の反復積分に焦点を当てて研究を行い、対称多重ゼータ値の様々な関係式や、正規化多重ゼータ値の関係式、大野和の間の、今まで知られていなかった新たな関係式など、様々な研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

周期とは、自然数、整数、有理数、代数的数の次にくる、重要な数のクラスである。ただし、周期が満たす代数的な性質などはほとんどが未解明であり、これからどんどん研究されていくべき分野である。周期の例として、射影直線上の反復積分がある。射影直線上の反復積分は、テイトモチーフという円周率と関係した最も基本的なモチーフから生成される混合テイトモチーフの周期の例となっているという意味で、最も基本的な周期の一つであり、これらの関係式の調査は、まず初めに取り組むべき課題の一つである。本研究は、射影直線上の反復積分の関係式について様々な成果を得ており、周期研究の第一歩として意義がある。

研究成果の概要（英文）：The iterated integrals on the projective line, including multiple zeta values, represent one of the most fundamental cases of a class of numbers known as periods. They have a highly beautiful structure but still contain many unknown aspects, making them an extremely intriguing subject of study. One of the central research themes is the algebraic equations they satisfy. In this research, I focused on the iterated integrals on the projective line and obtained various algebraic identities among symmetric multiple zeta values, regularized multiple zeta values, Ohno sums, and so on.

研究分野：整数論

キーワード：多重ゼータ値 反復積分

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

多重ゼータ値の一般化として射影直線上の反復積分がある。射影直線上の反復積分は、「混合テイトモチーフの周期」となることが知られており、その意味で代数幾何学的な観点からも自然な一般化である。そのため、射影直線上の反復積分について、より詳しく調べる必要があるというのが、本研究の動機である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、一般の射影直線上の反復積分について、今まで未知であった関係式を数多く発見し、それによって混合テイトモチーフの周期や射影直線上の反復積分に関する人類の知見を深めることである。

3. 研究の方法

本研究では、反復積分の満たす関係式等について数値計算も援用しながら調べた。

4. 研究成果

(1)有限多重ゼータ値や対称多重ゼータ値に関する研究

有限多重ゼータ値とは、多重ゼータ値の有限和類似である。また、それらと全く同様の関係式を満たすと予想されている量として対称多重ゼータ値がある。対称多重ゼータ値は、閉じたパスに対する反復積分として表すこともでき、その意味でも重要なクラスである。これらに関して、以下のような成果を得た。

村原氏、斎藤氏との共同研究で、有限多重ゼータ値に対する重み付きの和公式を調べた。ここで、その過程でいくつかの予想を提示し、また特別な場合には証明し、その結果を共著論文「Weighted sum formula for multiple harmonic sums modulo primes」にまとめた。この論文は、Proceedings of the American Mathematical Society 誌に掲載された。この論文で扱ったような指数型の重みに対する和公式は、多重ゼータ値に対しては複数知られていたが、有限多重ゼータ値に対する類似は知られていなかった。また、本論文で与えた有限多重ゼータ値の和公式は、多重ゼータ値に対して知られていた重み付き和公式よりシンプルで綺麗な形をしており、興味深い。そのような点でこの結果には意義がある。また本論文で提示した予想の一部は今だに未解決であり、今後の進展が待たれる。

村原氏、斎藤氏との共同研究で、有限多重ゼータ値の大野和を研究した。より詳しくは、深さ3のインデックスとその双対インデックスに対する有限多重ゼータスター値の大野和の差の母関数の明示的な公式を得た。これはインデックスが(2,1,2)の場合に金子氏によって予想されていた式の一般化となっている。この成果は、共著論文「Generating functions for Ohno type sums of finite and symmetric multiple zeta-star values」としてまとめた。この論文は Asian Journal of Mathematics 誌に掲載された。

村原氏、小野氏との共同研究で、 t 進対称多重ゼータ値の巡回和公式を、 t 進対称多重ゼータ値の山本積分表示を用いて証明した。この成果は共著論文「On variants of symmetric multiple zeta-star values and the cyclic sum formula」にまとめた。この論文は The Ramanujan Journal 誌に掲載された。

村原氏、斎藤氏との共同研究で1と3が交互に現れる index の場合の t -進対称多重ゼータ値の係数について、特にリーマンゼータの多項式として表される場合に、明示的な表示を与えた。この成果は共著論文「 t -adic symmetric multiple zeta values for indices in which 1 and 3 appear alternately」にまとめた。

(2)多重ゼータ値つくれる種々の族間の関係式の研究

村原氏、小野塚氏との共同研究で、Hoffman の algebraic setting から自然に得られる、ある種の多重ゼータ値の族について、それらの線形関係式を完全に決定し、更に川島関係式の線形部分と関連付け、またそれらの族の複素補間を得た。また、これらの結果を共著論文「 Q -linear relations of specific families of multiple zeta values and the linear part of Kawashima's relation」にまとめた。この論文は、manuscripta mathematica 誌に掲載された。多重ゼータ値の関係式の全貌は不明であり、例えば、多重ゼータ値の全関係式の空間の基底となるべきようなものを得るのは現時点では少なくとも証明レベルでは困難である。しかし多重ゼータ値の関係式に条件を付けた特定のサブクラスを考えれば、そのサブクラスについては構造を知ることが可能になりうる。本論文は、そのような実例であり、一つの自然なサブクラスに対しその構造を完全に決定し、さらに川島関係式の線形部分に新たな意味付けを与えるた。これが本結果の意義深い点の一つである。

村原氏、小野塚氏、佐藤氏との共同研究で、多重ゼータ値の大野和の満たす関係式について研究を行った。大野和の満たす関係式として、最も基本的なものとして大野関係式がある。これ以外に大野和が満たす関係式が存在するか、存在するとしたらどのようなものが存在するか、というのが主要な研究の動機である。この研究のために、大野和の間の線形関係式を求めるプログラムを作成し、線形関係式を調査した。そして大野和が満たす関係式として、新たに二種類の関係式を証明した。また4つの関係式族を数値計算で予想した。これらの成果は共著論文「Linear relations of Ohno sums of multiple zeta values」にまとめた。この論文は *Indagationes Mathematicae* 誌に掲載された。

佐藤氏、関氏との共同研究で、従来知られていた大野和に対するコネクターを二重大野和の枠組みに一般化した。これにより前年度の研究で得られていた二重大野関係式にコネクターを用いた新たな証明が与えられた。またさらに BBBL 型に限定されていた二重大野関係式のインデックスを一般のインデックスに拡張することにも成功した。またこれらの q -類似についても同様の構成を行った。これらの成果を共著論文「The connector for Double Ohno relation」にまとめた。この論文は *Acta Arithmetica* 誌に掲載された。

村原氏、斎藤氏との共同で以下のような研究を行なった。対称多重ゼータ値の和公式には、多重ゼータ値の和公式、等号付き多重ゼータ値の和公式、あるいはそれらの一般化であるシューア型多重ゼータ値の和公式と類似した項が現れる。この現象について直接的な説明を与えた。また、多項式多重ゼータ値の和公式を母関数の形で与え、対称多重ゼータ値の和公式の精密化など多くの系を得た。この結果は共著論文「Generating functions for sums of polynomial multiple zeta values」にまとめた。この論文は、*Pure and Applied Functional Analysis* 誌に掲載されている。

村原氏、小野氏との共同研究で補間多重ゼータ値に対する大野型関係式を証明した。これは多重ゼータ値の大野型関係式と等号付き多重ゼータ値の大野型関係式を同時に含む一般化となっている。またその系として、関氏による補間有限多重ゼータ値の和公式が導かれることも示した。この成果は共著論文「Ohno-type relation for interpolated multiple zeta values」にまとめた。この論文は、*Journal of Number Theory* 誌に掲載された。

(3) 多重ゼータ値の一般化に関する研究

村原氏、斎藤氏との共同研究で正規化多重ゼータ値と呼ばれる多重ゼータ値の一般化に対し、大野関係式を一般化した。本成果は共著論文「Ohno relation for regularized multiple zeta values」にまとめた。この論文は *Journal of the Mathematical Society of Japan* 誌に掲載された。

村原氏、小野塚氏と共同で、パラメトライズド多重級数について研究した。パラメトライズド多重級数は多重ゼータ値の一般化であり、巡回和公式と大野関係式を満たすことが五十嵐氏により知られていた。本研究では、パラメトライズド多重級数が、巡回和公式と大野関係式を共に含む線形関係式族である川島関係式の線形部分と呼ばれる線形関係式を満たし、また逆にパラメトライズド多重級数の線形関係式が川島関係式の線形部分でつくされることも証明した。この成果は共著論文「On the linear relations among parametrized multiple series」にまとめた。この論文は *The Ramanujan Journal* 誌に掲載されている。

モジュラー形式の周期多項式から(奇, 奇)インデックスの形式的二重ゼータ値の関係式が得られるという、Gangl-金子-Zagier の結果を一般化するため、以下のような研究をおこなった。まず、形式的二重ゼータ値を一般化し、レベル N の形式的二重ゼータ値を定義した。また(奇, 奇)インデックスの類似物についても定式化し、更にレベル N のモジュラー形式の周期多項式からレベル N の(奇, 奇)型形式的二重ゼータ値の関係式が得られることを示した。多重 L 値に対するモジュラー現象は限定的にしか知られていなかったため、本研究で与えたような一般のレベルの多重 L 値に対する結果は非常に画期的である。この成果については、「Colored double zeta values and modular forms of general level」というタイトルで論文にまとめた。

(4) その他の研究

佐藤信夫氏との共同研究で、ブロック次数2の多重ゼータ値に関して、ブロックシャッフル関係式から得られないような関係式についても研究を行い、二つの予想を定式化した。また対称多重ゼータ値に対するブロックシャッフル関係式も考察した。これらの成果を、ブロックシャッフル関係式の研究と合わせ「Block shuffle identities for multiple zeta values」というタイトルの論文として完成させた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 17件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Ono Masataka	4. 巻 238
2. 論文標題 Ohno-type relation for interpolated multiple zeta values	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 710 ~ 730
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2021.09.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Ono Masataka	4. 巻 56
2. 論文標題 On variants of symmetric multiple zeta-star values and the cyclic sum formula	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 467 ~ 489
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-020-00341-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Onozuka Tomokazu, Sato Nobuo	4. 巻 31
2. 論文標題 Linear relations of Ohno sums of multiple zeta values	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Indagationes Mathematicae	6. 最初と最後の頁 556 ~ 567
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.indag.2020.04.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Saito Shingo	4. 巻 56
2. 論文標題 Polynomial Generalization of the Regularization Theorem for Multiple Zeta Values	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 207 ~ 215
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/56-1-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Minoru Hirose, Hideki Murahara, Takuya Murakami	4. 巻 67
2. 論文標題 A Cyclic Analogue of Multiple Zeta Values	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli	6. 最初と最後の頁 147 ~ 166
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14992/00018670	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Onozuka Tomokazu	4. 巻 164
2. 論文標題 \mathbb{Q} -linear relations of specific families of multiple zeta values and the linear part of Kawashima's relation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 455 ~ 465
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-020-01191-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Sato Nobuo	4. 巻 556
2. 論文標題 Algebraic differential formulas for the shuffle, stuffle and duality relations of iterated integrals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 363 ~ 384
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.01.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Minoru Hirose, Nobuo Sato	4. 巻 348
2. 論文標題 Iterated integrals on $P_1 \setminus \{0, 1, z\}$ and a class of relations among multiple zeta values	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 163-182
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2019.03.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Saito Shingo	4. 巻 147
2. 論文標題 Weighted sum formula for multiple harmonic sums modulo primes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3357 ~ 3366
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14588	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 HIROSE Minoru, IMATOMI Kohtarō, MURAHARA Hideki, SAITO Shingo	4. 巻 75
2. 論文標題 OHNO-TYPE RELATIONS FOR CLASSICAL AND FINITE MULTIPLE ZETA-STAR VALUES	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 115-124
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.75.115	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Onozuka Tomokazu	4. 巻 126
2. 論文標題 An interpolation of Ohno's relation to complex functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 MATHEMATICA SCANDINAVICA	6. 最初と最後の頁 293-297
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7146/math.scand.a-119209	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Sato Nobuo, Seki Shin-ichiro	4. 巻 201
2. 論文標題 The connector for the double Ohno relation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 109 ~ 118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/aa200621-18-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Saito Shingo	4. 巻 74
2. 論文標題 Generating functions for sums of polynomial multiple zeta values	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 399-428
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj.20210409	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Saito Shingo	4. 巻 25
2. 論文標題 Generating functions for Ohno type sums of finite and symmetric multiple zeta-star values	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Asian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 871 ~ 882
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/AJM.2021.v25.n6.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru	4. 巻 -
2. 論文標題 Modular phenomena for regularized double zeta values	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-023-2587-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Minoru, Murahara Hideki, Onozuka Tomokazu	4. 巻 60
2. 論文標題 On the linear relations among parametrized multiple series	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 1095 ~ 1105
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-022-00658-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 HIROSE Minoru, MURAHARA Hideki, SAITO Shingo	4. 巻 75
2. 論文標題 Ohno relation for regularized multiple zeta values	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1177-1193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/89088908	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Double L-values and modular forms of general level
3. 学会等名 多重ゼータ値の諸相
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Euler sums and cyclotomic associators
3. 学会等名 Automorphic Forms and Number Theory
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Schur 多重ゼータ値の山本積分表示について
3. 学会等名 第17回多重ゼータ研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Ohno relation for shuffle regularized multiple zeta values
3. 学会等名 Friday Tea Time Zoom Seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Iterated integrals, motivic Galois groups, and cyclotomic associators
3. 学会等名 第66回代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 レベル 2^n の多重ゼータ値について
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー (拡大版) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 多重L値の次元について
3. 学会等名 第16回多重ゼータ研究集会 & 第58回関西多重ゼータ研究会 (共同開催) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Stuffle product formulas for various iterated integrals
3. 学会等名 第14回多重ゼータ研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 The motivic Galois group and alternating multiple zeta values
3. 学会等名 Japan Europe Number Theory Exchange Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Cyclotomic associators and motivic multiple L-values
3. 学会等名 第52回関西多重ゼータ研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Alternating multiple zeta values and their bases
3. 学会等名 第 18 回広島仙台整数論集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Multivariable generalizations of Zhao's generalized 2-1 formula and Zagier's 2-3-2 formula
3. 学会等名 第13回福岡数論研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Generalized double zeta values and modular forms
3. 学会等名 RIMS研究集会代数的整数論とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Motivic Galois group over $Z[1/2]$ and linear relations among motivic alternating multiple zeta values
3. 学会等名 Japan-Taiwan joint workshop on multiple zeta values (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 広瀬稔
2. 発表標題 Confluence relations for alternating multiple zeta values
3. 学会等名 第13回多重ゼータ研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Minoru Hirose
2. 発表標題 Multiple zeta values and modular forms for certain congruence subgroups
3. 学会等名 第12回ゼータ若手研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Minoru Hirose
2. 発表標題 Multiple zeta values and iterated integrals
3. 学会等名 第139回 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Minoru Hirose
2. 発表標題 Generalization of Zagier's 2-3-2 formula of multiple zeta values
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------