

令和 5 年 6 月 20 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13397

研究課題名（和文）コシユールAS-regular 代数の非可換代数幾何学および表現論的考察

研究課題名（英文）Koszul AS-regular algebras in terms of Non-commutative algebraic geometry and Representation theory

研究代表者

板場 綾子 (Itaba, Ayako)

東京理科大学・教養教育研究院葛飾キャンパス教養部・講師

研究者番号：10801178

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000 円

研究成果の概要（和文）：非可換代数幾何学において、当初Artin-Schelterは3次元AS正則環の分類を試み、regular potentialの部分的なリストを与えた。また、Mori-Smithは3次元コシユールAS正則環Aとregular twisted superpotential の間に一対一対応が存在することを示した。本研究では、松野仁樹氏との共同研究によって、楕円曲線を除く場合の任意の3次元コシユールAS正則環に対して、regular twisted superpotentialおよび、Calabi-Yau superpotentialのリストを与えることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究結果の応用として、任意の3次元コシユールAS正則環に対して、ある3次元コシユール Calabi-Yau AS 正則環が存在し、これらは次数付き森田同値であることを示した。これは全ての射影平面は座標環として Calabi-Yau AS 正則環を持つことを示唆する。この結果はコシユール双対を介することで多元環の表現論の考察 対称となるが、任意の根基の4乗が0となるフロベニウス多元環に対して、ある対称なコシユール多元環が存在し、これらは次数付き森田同値であることを得た。これは次数がついていない多元環では起こらないため、次数付き多元環と次数付きでない多元環との差を示す更なる結果を与えたと言えよう。

研究成果の概要（英文）：In Noncommutative Algebraic Geometry, at first, Artin-Schelter tried to classify all 3-dimensional AS-regular algebras and gave a partial list of regular potential. Also, Mori-Smith proved that there is one-to-one correspondence between a 3-dimensional AS-regular algebra and regular twisted superpotential. In this research joint work with Masaki Matsuno, we gave the lists of regular twisted superpotential and Calabi-Yau superpotential for any 3-dimensional Koszul AS-regular algebra except for elliptic curves.

研究分野：環論

キーワード：コシユール AS正則環 Calabi-Yau 多元環 射影空間 フロベニウス多元環 次数付き森田同値

### 1. 研究開始当初の背景

本研究課題では、非可換代数幾何学における重要な考察対象である 3 次元 quadratic AS 正則環と、多元環の表現論における重要な考察対象であるそのコシュール双対であるコシュールなフロベニウス多元環を研究対象とする。一つ目の目的は、「任意の 3 次元 quadratic AS 正則環はある Calabi-Yau AS 正則環と次数付き森田同値である」(予想 I) を解決することである。二つ目の目的は、非可換代数幾何学と多元環の表現論における毛利氏の予想を解決することである。「有限次元多元環を cogeogetic かつ自己移入的コシュール多元環とする。このとき、多元環が有限条件 (Fg) を満たすことの必要十分条件は、 $E$  の自己同型 の位数が有限であることである」(予想 II)。本研究では、geometric かつ 4 次元 quadratic AS 正則環のコシュール双対である、radical の 5 乗が 0 になるような cogeogetic かつ自己移入的コシュールである有限次元多元環に関して予想 II の解決を目指す。

### 2. 研究の目的

AS 正則環とは、Artin-Schelter [AS] が提唱した多項式環の非可換類似のことである。実際、可換な AS 正則環は多項式環と同型になる。しかし、非可換の高次元 AS 正則環は数多くあり、この分類は盛んに行われている。一般にコシュール AS 正則環は、コシュール双対を取ることで、有限次元多元環の表現論の重要な考察対象である、コシュールなフロベニウス多元環と対応することが Smith [S] によって示された。この Smith の定理により、非可換代数幾何学と多元環の表現論は密接に関わっていることが分かる。また、任意の 3 次元 AS 正則環は quadratic か cubic のどちらかになることが知られている ([ATV1])。本研究課題では、3 次元 quadratic AS 正則環とそのコシュール双対であるコシュールなフロベニウス多元環を考察対象とし、非可換代数幾何学的側面 (I) および多元環の表現論的側面 (II) の両方の研究を行う。

(1) 本研究の一つ目の目的は、予想「任意の 3 次元 quadratic AS 正則環はある Calabi-Yau AS 正則環と次数付き森田同値である」(以下、予想 I とよぶ) を解決することである。Calabi-Yau 代数は表現論や非可換代数幾何学などで調べられている非常に重要な研究対象であり、特に superpotential を用いる Calabi-Yau 代数の研究は近年盛んに研究されている。任意の 3 次元 quadratic AS 正則環は geometric という射影平面の閉部分スキーム  $E$  とその自己同型からなる幾何的な組との 1 対 1 対応がある代数であり、 $E$  の候補としては、射影平面自身または射影平面内の 3 次曲線のどちらかであることが知られている ([ATV1])。

(2) 本研究の二つ目の目的は、毛利氏が提示した予想を解決することである。この予想は有限次元自己移入的コシュールかつ cogeogetic 多元環と、多元環のサポート多様体の理論に関する Erdmann らが定義した有限条件 (Fg) との関係性を述べたものである。Artin-Tate-Van den Bergh は、非可換代数幾何学で重要な役割を果たす point 加群と呼ばれる加群を導入したが、毛利氏は point 加群のコシュール双対概念に相当する加群を定義し、これを co-point 加群と名付けた。co-point 加群は射影空間の部分集合  $E$  でパラメタライズされる。 $E$  とその間の写像の組  $(E, \sigma)$  を cogeogetic pair とよび、 $E$  が射影多様体で  $\sigma$  が  $E$  の自己同型になるとき、 $E$  と  $\sigma$  から決まる次数付き多元環  $A'(E, \sigma)$  を cogeogetic とよぶ。毛利氏の予想とは次のものである。「有限次元多元環を cogeogetic かつ自己移入的コシュール多元環とする。このとき、多元環が有限条件 (Fg) を満たすことの必要十分条件は、 $E$  の自己同型 の位数が有限であることである」(以下、予想 II とよぶ)。ここで、有限次元多元環の場合、自己移入的であることとフロベニウスであることは同値であることを注意しておく。

### 3. 研究の方法

(1) 3 次元 quadratic AS 正則環  $A$  の関係式を superpotential  $w$  の による twist  $w$  で表し、つま superpotential  $w$  を見つけ方を確立し、予想 I 自体の解決をする。予想 I の解決のために、次の予想 (I-1) を中継する。予想 (I-1) 「 $A$  を 3 次元 quadratic AS 正則環とする。有限次元  $k$ -ベクトル空間  $V$  の自己同型  $\sigma$  と superpotential  $w \in V^{\otimes 3}$  が存在し、 $A$  と superpotential の twist  $w$  の derivation-quotient algebra  $D(w, \sigma)$  が次数付き多元環として同型になる。」予想 (I-1) の解決には、3 次元 quadratic AS 正則環  $A$  の関係式を superpotential  $w$  の による twist  $w$  で表せばよい。Calabi-Yau 多元環は superpotential  $w$  の derivation-quotient 多元環  $D(w)$  で表せられることが知られている。見つけた superpotential  $w$  と  $\sigma$  に対して、 $\sigma$  がさらに  $D(w)$  の自己同型であれば、毛利-Smith [MS] の結果より、 $A(=D(w, \sigma))$  とある Calabi-Yau 多元環  $C(=D(w))$  が次数付き森田同値となり、予想 I の主張が成立する。

(2) 予想 II の解決の足がかりとして、4 次元 AS 正則環でかつコシュールで geometric であるような多元環のコシュール双対に関して、予想 II の主張が成り立つかどうかを調べる。そも

そも 4 次元以上の quadratic AS 正則環は世界的にもまだ研究があまり進んでいない。[1] では, radical の 4 乗が 0 になるような cogeometric かつ自己移入的コシュール多元環に関して予想 II の主張を証明している。その際に重要な鍵となったのは, 次の[ATV2]における定理である: 3 次元 AS 正則環  $R$  に対応する幾何的な組  $(E, \mathcal{O}_E)$  (ただし,  $\mathcal{O}_E$  は  $E$  の自己同型) に対して,  $\mathcal{O}_E$  の位数が有限であること の必要十分条件は  $R$  が  $R$  の中心  $Z(R)$  上有限生成であることである。本研究課題である, geometric かつ 4 次元 quadratic AS 正則環のコシュール双対である, radical の 5 乗が 0 になるような cogeometric かつ自己移入的コシュールである有限次元多元環に関して予想 II の主張が成り立つことを証明するには, 上の定理の主張を geometric かつコシュールであるような 4 次元 AS 正則環に拡張した結果が必要になる。これは現在まで特に反例も見つかっておらず, 非可換代数幾何学においての未解決問題の一つである。また 4 次元の quadratic AS 正則環は一般に geometric でないことが知られている。例えば, 4 次元 AS 正則環でかつコシュールで geometric であるような多元環  $A=A(E, \mathcal{O}_E)$  の  $E$  の候補としては, 射影空間や射影空間内の楕円曲線などを調べる。しかし, これに対応する多元環  $A$  の関係式や  $A$ -加群の次数付き圏の構造がどうなっているかなどは分かっておらず, まずはここから調べることにする。

#### 4. 研究成果

(1) 本研究では, 松野仁樹氏との共同研究[IMa]によって, 楕円曲線を除く場合の任意の 3 次元コシュール AS 正則環に対して, regular twisted superpotential および, Calabi-Yau superpotential のリストを与えることができた。本研究結果の応用として, 任意の 3 次元コシュール AS 正則環に対して, ある 3 次元コシュール Calabi-Yau AS 正則環が存在し, これらは次数付き森田同値であることを示すことに成功した。この結果は, 全ての射影平面は座標環として Calabi-Yau AS 正則環を持つことを示唆する。また, この結果はコシュール双対を介することで多元環の表現論の考察対称となるが, 任意の根基の 4 乗が 0 となるフロベニウス多元環に対して, ある対称なコシュール多元環が存在し, これらは次数付き森田同値であることを得た。これは次数がついていない多元環では起こらないため, 次数付き多元環と次数がついていない多元環との差を示す更なる結果を与えたとも言えよう。

今後, この研究で得られたリストを用い, これらの環拡大を行うことで得られる 4 次元コシュール AS 正則環の性質を調べる研究につなげていく所存である。なお, 4 次元以上のコシュール AS 正則環に関しては現在でもまだ知られていないことや未解決の問題がとて多いため, 今後の研究がとて役立つことが予想される。

(2) この研究に関してはこの分野の未解決問題を含むとて困難が伴い, 上記の方法を取ったが残念ながら部分的にも何かしらの結果や解決の糸口を与えることができなかった。しかしその原因の一つは, 上述のように 4 次元以上のコシュール AS 正則環に関して未知なことや未解決の問題がとて多いたことが起因としてあげられる。(1)の続きとして, 4 次元のコシュール AS 正則環の研究を行うため, この研究を遂行していく上で(II)の問題も進めていけると考えている。また, 本研究課題とは別の毛利出氏との共同研究 [IMo] において, 3 次元コシュール AS 正則環に付随する非可換射影スキームの中心上有限生成であることと, 3 次元コシュール AS 正則環に関しての幾何的な組  $(E, \mathcal{O}_E)$  の  $\mathcal{O}_E$  のノルムというものが有限であることが同値であることを証明した。これは Artin-Tate-Van den Bergh[ATV2]の結果「3 次元 AS 正則環  $A$  に対応する幾何的な組  $(E, \mathcal{O}_E)$  (ただし,  $\mathcal{O}_E$  は  $E$  の自己同型) に対して,  $\mathcal{O}_E$  の位数が有限であること の必要十分条件は  $A$  が,  $A$  の中心上有限生成であることである」の圏論的類似を与えた結果となっている。(II)の問題に対して,  $\mathcal{O}_E$  の位数が有限であることとの同値性を考えていたが,  $\mathcal{O}_E$  のノルム概念へと広げることで, (II)の問題を圏論の問題として扱う方が見通しはよくなるのではないと予想している。今後, この視点での研究も並行して行う予定である。

#### <参考文献>

[AS] M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, Adv. Math. 66 (1987), 171-216.

[ATV1] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Mathematics vol. 86 (Birkhäuser, Basel, 1990) 33-85.

[ATV2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Module over regular algebras of dimension 3, Invent. Math. 106 (1991), no. 2, 335-388.

[1] A. Itaba, Finiteness condition (Fg) for self-injective Koszul algebras, Algebr. Represent. Theory 22 (2019), no. 2, 425--435.

[IMa] A. Itaba and M. Matsuno, AS-regularity of geometric algebras of plane cubic curves, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 112 (2022), Issue 2, 193-217.

[IMo] A. Itaba and I. Mori, Quantum projective planes finite over their centers, *Canad. Math. Bull.*, Vol. 66 (2023), Issue 1, 53--67.

[MS] I. Mori and S. P. Smith,  $m$ -Koszul Artin-Schelter regular algebras, *J. Algebra*. 446 (2016), 373-399.

[S] S. P. Smith, Some finite dimensional algebras related to elliptic curves, in *Representation Theory of Algebras and Related Topics (Mexico City, 1994)*, CMS Conf. Proc, 19. Amer. Math. Soc., Providence, (1996), 315-348.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 ITABA AYAKO, MATSUNO MASAKI	4. 巻 112
2. 論文標題 AS-REGULARITY OF GEOMETRIC ALGEBRAS OF PLANE CUBIC CURVES	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 193 ~ 217
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1446788721000070	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Itaba Ayako, Ueyama Kenta	4. 巻 online first
2. 論文標題 Hochschild cohomology related to graded down-up algebras with weights (1,n)	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 2150131 ~ 2150131
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219498821501310	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Itaba Ayako, Izuru Mori	4. 巻 arXiv
2. 論文標題 Quantum Projective Planes Finite over their Centers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 arXiv:2010.13093	6. 最初と最後の頁 1--14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ayako Itaba and Masaki Matsuno	4. 巻 63
2. 論文標題 The defining relations of 3-dimensional quadratic AS-regular algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 61-86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 板場綾子	4. 巻 -
2. 論文標題 3次元quadratic AS 正則環のCalabi-Yau 性	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 研究集会「第12回数論女性の集まり」報告集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 板場綾子	4. 巻 -
2. 論文標題 Frobenius Koszul 多元環と対称多元環の次数付き森田同値	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS研究集会「有限群とコホモロジー論とその周辺」京都大学数理解析所講義録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ayako Itaba and Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Hochschild cohomology of Beilinson algebras of graded down-up algebras	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 52nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory,	6. 最初と最後の頁 29-34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ayako Itaba and Masaki Matsuno	4. 巻 -
2. 論文標題 Defining relations of 3-dimensional quadratic AS-regular algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 arXiv:1806.04940	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ayako Itaba and Masaki Matsuno	4. 巻 -
2. 論文標題 The defining relations of geometric algebras of Type EC	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第51回環論および表現論シンポジウム (静岡大学) 報告集	6. 最初と最後の頁 45--51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 板場綾子	4. 巻 2061
2. 論文標題 自己移入的Koszul 多元環に対する有限条件(Fg)	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 研究集会「有限群とコホモロジー論とその周辺」京都大学数理解析所講究録	6. 最初と最後の頁 32--38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 板場綾子	4. 巻 -
2. 論文標題 楕円曲線に対応する3次元quadratic AS 正則環	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 研究集会「第11回数論女性の集まり」(立教大学) 報告集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Ayako Itaba
2. 発表標題 Characterization of quantum projective planes finite over their centers
3. 学会等名 OCAMI代数セミナー (大阪市立大学) zoom (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 41. 板場綾子, 毛利出
2. 発表標題 中心上有限生成な非可換射影平面の特徴づけ
3. 学会等名 2021年度日本数学会年会(慶應義塾大学)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 板場綾子
2. 発表標題 3次元 quadratic AS 正則環のCalabi-Yau 性
3. 学会等名 研究集会「第12回数論女性の集まり」(東京理科大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 板場綾子, 上山健太
2. 発表標題 Down-up algebra のBeilinson algebra のホッホシルトコホモロジーについて
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会(金沢大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ayako Itaba and Kenta Ueyama
2. 発表標題 Hochschild cohomology of Beilinson algebras of graded down-up algebras
3. 学会等名 The Eighth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory (Nagoya University, Japan) (国際学会)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 板場綾子
2. 発表標題 3次元quadratic AS 正則環に付随する非可換射影スキームの中心上有限生成について
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会(日本大学)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 板場綾子
2. 発表標題 楕円曲線に対応する3次元 quadratic AS 正則環
3. 学会等名 研究集会「第11回数論女性の会」(立教大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ayako Itaba and Masaki Matsuno
2. 発表標題 The defining relations of geometric algebras of Type EC
3. 学会等名 第51回環論および表現論シンポジウム(岡山理科大学)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 板場綾子, 松野仁樹
2. 発表標題 点スキームが楕円曲線である幾何的代数の代数同型および森田同値を除く分類について
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会(岡山大学)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 板場綾子
2. 発表標題 3次元quadratic AS 正則環と幾何的代数の分類
3. 学会等名 野田代数セミナー(東京理科大学)(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 板場綾子
2. 発表標題 Frobenius Koszul 多元環と対称多元環の次数付き森田同値
3. 学会等名 RIMS研究集会「有限群とコホモロジー論とその周辺」(京都大学数理解析所)(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 板場綾子, 松野仁樹
2. 発表標題 楕円曲線に対応する幾何的代数のAS正則性
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会(東京工業大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ayako Itaba
2. 発表標題 Defining relations of 3-dimensional quadratic AS-regular algebras and Calabi-Yau algebras
3. 学会等名 ICRA2018, (ブラハ, Charles University)(国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01Detail.php?act=pos&kin=ken&diu=5e8e>  
<https://researchmap.jp/ayaita>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------