様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 １９ 日現在

機関番号：３２４０７
研究種目：若手研究
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ１３４０３

研究課題名（和文）自由ループ空間の有理係数ホモロジーの研究

研究課題名（英文）Studies on the rational homology of free loop spaces

研究代表者
内藤　貴仁（Naito, Takahito）

日本工業大学・共通教育学群・講師

研究者番号：２０７２４５１１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：自由ループ空間とは、単位円から与えられた空間への連続写像全体の成す位相空間である。本研究の目的は、自由ループ空間の有理係数ホモロジーを考察し、ストリングトポロジーの文脈で現れる代数構造がもたらす多様体の幾何学的情報を調べることを目的とする。結果として、次の研究成果を得られた. (1) ループホモロジー代数の生成系に関する考察と、ストリング括弧積の新たな計算方法の導入. (2) 自由ループ空間に関するCartan calculusと、その構造とストリングトポロジー代数構造との関連性を明らかにした (3) ストリング余積の研究、特にHodge分解の次数に関する振る舞いを、pure多様体の場合に決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
自由ループ空間のホモロジーや、その上のストリングトポロジー代数構造を計算する事は一般的に困難である。本研究成果では、まずBV完全という新たな位相空間のクラスを導入し、同変ループホモロジー上のストリング括弧積の新たな計算方法を与えた。また自由ループ空間に関するCartan calculusとストリングトポロジー代数構造を関連付け、自由ループ空間のホモロジー研究を推進したと同時に、新たな幾何学的研究アプローチを発見することも出来た。

研究成果の概要（英文）：The free loop space is a topological space consisting of all continuous map from the circle to a space. The aim of this research is to investigate rational homology of free loop spaces and obtain geometric information of a given manifold from algebraic structures in string topology. As consequence, we have the following research results. (1) we observe a generator set of the loop homology algebras and, moreover, give a new computational method of the rational string bracket. (2) we introduce Cartan calculi on the free loop spaces and clarify relations between the calculus and the algebraic structures in string topology. (3) we study the string coproduct on the reduced loop homology by rational homotopy theory. Especially, we investigate a behavior of the coproduct of pure manifolds with respect to the degree of the Hodge decomposition of the loop homology.

研究分野：幾何学

キーワード：自由ループ空間　ストリングトポロジー　有理ホモトピー論

１．研究開始当初の背景

向きづけられた閉多様体の自由ループ空間に関する研究は、リーマン多様体上の測地線論に始まり，環論，シンプレクティック幾何学といった多岐に渡る数学分野と関連しながら進展してきた。自由ループ空間のホモロジーに関しては、スペクトル系列や有理ホモトピー論を用いて様々な具体的計算例が与えられてきたが、一般的に計算することは困難である。

近年では Chas と Sullivan によって創始されたストリングトポロジー理論を皮切りに、自由ループ空間のホモロジー（以後、ループホモロジーと呼ぶ）上に多種多様な代数構造が発見されてきた。まず Chas と Sullivan によるループ積と呼ばれるループホモロジー上の積、そして Batalin-Vilkovisky(BV)代数構造が導入され、S^1同変ホモロジー上にストリング括弧積と呼ばれる Lie 代数構造が定義された。その構造が拡張され、ループホモロジーは Cohen と Godin によって 2 次元位相的量子場理論(TQFT)、Godin によってホモロジー的共形場理論(HCFT)である事が示された。

研究代表者は、それらの代数構造への理解を深めるため、主に有理ホモトピー論を主軸とした代数的手法により、ストリングトポロジーの研究を進めてきた。しかしながら、ストリングトポロジーがもたらす多様体の幾何学的情報については分かっていない事も多く、更なる研究が求められている。

２．研究の目的

本研究の目的は、有理係数体上の自由ループ空間ホモロジーを研究し、ストリングトポロジー理論の代数構造がもたらす空間の幾何学的情報を調べることである。これまでの研究を通じて、ストリングトポロジー理論の更なる進展の為には、ループホモロジーの構造をよく知る事が必要不可欠であると研究代表者は考えていた。実際、これまでの研究背景でも述べた通り、ループホモロジーの具体的計算は一般的に困難であり、それ故に深い理解が得られていない側面がある。

また、自由ループ空間のコホモロジー環が一般的に無限生成なのに対し、これまでのループホモロジー代数の計算結果をみると、どれも有限生成であることが分かる。研究代表者は、Sullivan によって導入されたストリング余積と呼ばれる相対ループホモロジー上の余積構造によって、その生成系が特徴づけされるのでは考えていた。しかしながら、ストリング余積に関する研究は多くなく、具体的計算例もほとんどない状況であった。

そこで、本研究目的を念頭に、具体的には (1) 有理ホモトピー論を用いたループホモロジー類の研究, (2)ループホモロジー類の幾何学的特徴づけ (3) ストリング余積の有理ホモトピー論を用いた研究、を目標に掲げ研究を遂行する。

３．研究の方法

研究目的（1）に関して、まずストリングトポロジー代数、特に Chas-Sullivan のループ積の新たな具体的計算例を与える事から始める。ループ積については、有理ホモトピー論を用いた代数的モデルが構成されているため、それを用いた計算を行う。また空間については、rationally elliptic と呼ばれる多様体のクラスに着目した。その理由として、有理ホモトピー型が低次元の場合には分類されているという点が挙げられる。ループホモロジー、及びループ積を計算し、rationally elliptic 多様体の場合に見られるストリングトポロジー代数構造について考察する。また rationally elliptic ではない他の多様体についても、ストリングトポロジー代数構造の新たな計算手法について考察する。

研究目的（2）の遂行の為に、有理係数ループホモロジーの Hodge 分解に着目する。ここでいう Hodge 分解とは、n 重ループを対応させる自由ループ空間の冪写像を考え、その写像が誘導するホモロジー間の線形写像から得られる固有空間分解の事である。この分解は非負整数により添え字づけられており、0 次部分は定置ループの成す空間のホモロジーと一致する。１次部分に関しては Felix-Thomas により、ある写像空間のホモトピー群からの単射が構成された。彼らの結果のアイデアと有理ホモトピー論を駆使し、ループホモロジー類の幾何学的特徴づけについての考察を行う。

研究目的（３）については次の方法により研究を遂行する。まず有理ホモトピー論を用いて、ストリング余積の代数的モデル、特に与えられた多様体の Sullivan モデルを用いた記述を与える。その代数的モデルを用いて、ストリング余積の性質や具体的計算を行う。また具体的計算例により、ループホモロジー代数の生成系が、ストリング余積によって特徴づけ出来るのかについて考察を行う。更に、研究目的(2)の研究方法でも述べた Hodge 分解とストリング余積の関係性について考察を行う。ストリング余積と Hodge 分解の次数の関係性について調べ、余積がループホモロジー上でどのように振舞うのかを考察する。

４．研究成果

研究目的（１）に向けて、まず２次複素射影空間の連結和の有理係数ループホモロジー、及びループ積の具体的計算を与え、これにより４次元 rationally elliptic 多様体のループ積の構造を完全に決定することが出来た。この計算結果を通じて、ループ積の生成系がループホモロジーの Hodge 分解の次数 0 と 1 の部分に集約できることを発見した。この結果は、与えられた多様体とループホモロジー代数の生成系が含まれる Hodge 分解の最低次数との関係性という新たな問題提起につながった。

また栗林勝彦氏、若月駿氏、山口俊博氏との共同研究の中で BV 完全多様体という新たな多様体のクラスを導入した。そのクラスの１つの特徴付けとして、ループホモロジーと S^1-同変ループホモロジーの間に良い関係性を持つというものがある。その特徴づけを生かし、ある formal ではない 11 次元多様体のストリング括弧積の具体的計算を与える事に成功した。ストリング括弧積とは、S^1-同変ループホモロジー上の Lie 括弧積の事であり、ループ積以上に計算する事が困難な代数構造である。本研究は、新たなストリング括弧積の計算方法を与え、また具体的計算方法を与えたことにより、その有用性について示すことが出来た。BV-完全については論文にまとめ、学術雑誌に投稿中である。

栗林勝彦氏、若月駿氏、山口俊博氏との共同研究として、自由ループ空間に関する Cartan calculus に関する研究も行った。古典的な Cartan calculus の例として、滑らかな多様体上の de Rham 複体上の Lie 微分と内部積が挙げられる。それらは、多様体上のベクトル場に付随して得られる derivation であり、de Rham 複体の微分（外微分）と合わせて、カルタン公式と呼ばれる恒等式を満たすことが知られている。更に Fiorenza と Kowalzig はこの構造を定式化し、ホモトピーCartan calculus の概念を与えた。これは簡単に述べると、カルタン公式がホモトピーを除いて成り立つような定式化である。

本共同研究では、まず与えられた多様体の de Rham 複体の Hochschild チェイン複体を考え、その上のホモトピーCartan calculus の構造を与えた。更にその幾何学的表現を、自由ループ空間のコホモロジーへの、あるリー代数作用として与えた。幾何学的表現であることを示す為に、有理ホモトピー論の文脈で Vigué-Poirrier と Sullivan によって与えられた、自由ループ空間の Sullivan モデルを用いた。多様体の Sullivan モデル上の derivation の成す Lie 代数を自由ループ空間の Sullivan モデルへ作用させ、それにより代数的、幾何学的に定義された Cartan calculus が同型を除いて一致することを証明した。

また一方で、共同研究で構成した自由ループ空間上の Cartan calculus とストリングトポロジーで登場するループ積とループ括弧積と呼ばれる代数構造との関連について考察を行った。その結果、研究方法で述べた Félix-Thomas の写像を通じて、内部積とループ積、及び Lie 微分とループ括弧積に関する公式を与える事に成功し、研究目的（２）に対する１つの結果を得ることが出来た。本結果の応用として、まず今回構成したループホモロジー上の Lie 微分がループ積に関して derivation であることが、得られた公式を用いることで示される。また与えられた多様体が非単連結の場合に、ループ積が Hodge 分解の次数に関してどのように振舞うのかを部分的に決定した。尚、栗林勝彦氏、若月駿氏、山口俊博氏との共同研究、及び Cartan calculus とストリングトポロジーに関する研究成果は論文としてまとめ、学術雑誌に投稿中である。

研究目的（３）について、まず有理ホモトピー論を用いたストリング余積の代数的モデル(Sullivan モデルによる記述)を構成し、そのモデルを用いて具体的計算例を与えた。特に球面の場合に有理係数ストリング余積の構造を完全に決定することが出来た。これは単連結多様体の場合において、ストリング余積の初めての計算例だと思われる。またストリング余積と Hodge 分解の関係性について、pure 多様体の場合に考察を行った。ここで pure 多様体とは、有理ホモトピー論の文脈、特に Sullivan モデルの言葉で特徴づけされる多様体であり、そのクラスは、球面や複素射影空間、等質空間といった重要な空間を含む。研究代表者は、pure 多様体の有理ホモトピー群の奇数次数の部分と偶数次数の部分の次元の差によって、ストリング余積が Hodge 分解の次数に関して異なる振る舞いをすることを明らかにした。この結果により、ループホモロジー類をストリング余積で分解した場合、分解したホモロジー類の Hodge 分解次数は元の次数よりも下がり、更にその下がり方は有理ホモトピー群の次元の情報で決定されることが判明した。本研究成果は論文としてまとめ、学術雑誌（Journal of Homotopy and Related Structures）に掲載済みである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Naito Takahito	4．巻 16
2．論文標題 Rational model for the string coproduct of pure manifolds	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Homotopy and Related Structures	6．最初と最後の頁 667～702
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40062-021-00293-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　3件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 内藤貴仁
2．発表標題 Cartan calculi on the free loop spaces
3．学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 内藤貴仁
2．発表標題 Cartan calculi on the free loop spaces
3．学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4．発表年 2022年

1．発表者名 内藤貴仁
2．発表標題 Cartan calculus in string topology
3．学会等名 高知ホモトピー論談話会2022
4．発表年 2022年

１．発表者名 内藤貴仁
２．発表標題 Cartan calculus in string topology
３．学会等名 Building-up differential homotopy theory in Aizu 2023（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 内藤貴仁
２．発表標題 The rational loop cutting coproduct and the Hodge decomposition
３．学会等名 Homotopy Theory Symposium 2020
４．発表年 2020年

１．発表者名 内藤貴仁
２．発表標題 The rational string coproduct and the Hodge decomposition
３．学会等名 Toric Topology 2021 in Osaka（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 内藤貴仁
２．発表標題 CP^2 # CP^2 の有理ループホモロジー代数の生成系
３．学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関