

令和 5 年 6 月 23 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13405

研究課題名（和文）超局所圏とホモロジー的ミラー対称性の研究

研究課題名（英文）Study of microlocal category and homological mirror symmetry

研究代表者

桑垣 樹 (Kuwagaki, Tatsuki)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：60814621

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：ホモロジー的ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何と代数幾何の間の不思議な双対性である。シンプレクティック幾何側は従来Floer理論と呼ばれる幾何解析的な理論を用いて理解されていたが、近年、超局所層理論とよばれる代数解析的な理論で理解できるようになってきた。この研究では、トーリック多様体というクラスの代数多様体に対して、その技術を用いてミラー対称性を証明したり、またそのような代数解析的手法自体を深める研究をおこなった。その結果、線形微分方程式の解を調べるWKB解析とよばれる手法と超局所層理論との関係も明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

トーリック多様体のミラー対称性を層理論を用いた証明は、（私自身のものとは限らない）さまざまな派生研究（偏屈圏のミラー対称性、トーリック退化・因子のミラー対称性など）を生み、学術的意義は大きかったと考える。また、超局所層理論をもちいたシンプレクティック幾何の研究は、量子化とFloer理論の関係を明確にする上での端緒となると考えられ、今後の発展への期待が大きい。

研究成果の概要（英文）：Homological mirror symmetry is a mysterious duality between symplectic geometry and algebraic geometry. Traditionally, the symplectic side is studied via Floer theory, which is a geometric analytic theory. Recent advances of algebraic analysis enables us to study the symplectic side through sheaf theory. In this study, we used the technology to prove homological mirror symmetry of toric varieties. Also, we also studied the technology itself, and found a relationship between WKB analysis and microlocal sheaf theory.

研究分野：Geometry

キーワード：深谷圏 シンプレクティック幾何 超局所層理論 ミラー対称性 RH対応 WKB解析

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

空間上の関数のクラスを一つ指定すると、それが局所的な性質で規定されているとき、層になる。たとえば、微分方程式の解は層をなす。柏原-Schapira は 80 年台から 90 年台にかけて、微分方程式の層理論的に触発されて、超局所層理論を創始した。超局所層理論は、多様体上の層を調べる理論である。多様体とは微積分学ができる空間であり、層の微分的な振る舞いを調べるのが超局所層理論である。もっと具体的には、超局所層理論は、層の定義された多様体の余接束上にさまざまな対象を構成することで層を調べる理論である。

当初は、超局所層理論は微分方程式、トポロジー、表現論への応用が主であった。それが達成した大きな考え方は、微分方程式の超局所解析学の Riemann-Hilbert 対応のもとでの、位相的な類似物がある、ということであった。

00 年代になると状況が変わる。超局所層理論のシンプレクティック幾何への応用が徐々に発見された。シンプレクティック幾何はもともと解析力学の数学的定式化の言葉として整備された幾何学である。Gromov や Witten の仕事により、シンプレクティック幾何は大きな進化を遂げた。特に、弦理論の数学的な研究に大きな役割を果たすようになった。特に、弦理論が予言するミラー対称性は、シンプレクティック幾何と複素幾何という大きく異なる幾何学の間不思議な対応を予言する。ミラー対称性のひとつの数学的定式化はホモロジー的ミラー対称性とよばれ、それぞれの幾何から現れる圏の圏同値として表現される。シンプレクティック幾何に付随する圏は深谷圏と呼ばれ、シンプレクティック多様体のラグランジュ部分多様体を対象、射および車の合成はラグランジアン交差フレアー理論によって定義される。ラグランジアンフレアー理論は、非線型方程式の解のモジュライを使用するなど超越的に定義され、それに伴い深谷圏は計算が困難であることがよく知られている。

超局所層理論のシンプレクティック幾何への最初の大きな応用は、Nadler-Zaslow による余接束の深谷圏と構成可能層の圏同値である。この圏同値は、超局所層理論をもちいてよく理解できる。すなわち、(近似的には) 構成可能層に対して、その超局所台と呼ばれる余接束に定義される台を対応させると、それが対応する深谷圏の対象を近似する。層のコホモロジー論は、深谷圏よりもたくさん計算手段がよく知られており、容易である。すると、Nadler-Zaslow の同値は、深谷圏の計算手段を与えてくれる。これは、ホモロジー的ミラー対称性の証明にも大きなアドバンテージがあると考えられる。実際に、Fang-Liu-Treumann-Zaslow は、トーリック多様体に対するホモロジー的ミラー対称性を超局所層理論の言葉で定式化した。そして、彼ら自身は、その同変版を証明した。オリジナルの予想は 10 年ほど予想として残されていた。私は二次元の場合の証明を行ない、また Nadler の研究を用いて、非コンパクトの場合に予想を拡張した。そして、圏の貼り合わせ技法を用いた一般の証明を完成させていた。

他方、Nadler-Zaslow の定理を余接束以外(Weinstein 多様体)に拡張することを目指した Nadler-Kontsevich の予想は、Ganatra-Pardon-Shende により、リウビルセクターの部分巻き深谷圏を定義することによる解決がアナウンスされていた。これらが、深谷圏まわりの研究開始当初の状況である。

また、もうひとつのシンプレクティック幾何への超局所層理論の応用は Tamarkin による変数を追加するトリックによる非錐的ラグランジュ部分多様体の超局所層理論での取り扱いである。超局所台はその定義から、余接束の錐的な部分集合になる。そこで、超局所層理論で安直にラグランジュ部分多様体を取り扱おうとすると、錐的なラグランジュ部分多様体しか取り扱うことができない。Tamarkin は底空間に一次元の実直線を直積することで、非錐的な集合を錐的な集合に持ち上げて、超局所層理論で取り扱うことを可能にした。このようなテクニックは、変形量子化や幾何学的量子化の文脈では知られていたが、それを超局所層理論の文脈に持ち込んだ点が新しかった。Tamarkin はこのトリックを使って、非動性定理などシンプレクティックトポロジーの重要な問題へのアプローチを与えた。当初 Tamarkin の論文は何回で理解が進んでいなかったが、Guillermou、柏原、Schapira によるフォローアップにより、理解が広まるようになった。そして、余接束内の任意の完全ラグランジュ部分多様体を Tamarkin の方法で扱えるようにする Guillermou や Jin-Treumann の仕事が見られた。また、Tamarkin のテクニックを不確定 Riemann-Hilbert 対応の定式化に応用した、D'Agonlo-柏原の仕事も現れ、その理解が進みつつあった。これらが、Tamarkin のトリック周りの研究開始当初の状況である。

2. 研究の目的

上述のように、私はトーリック多様体のミラー対称性の証明の超局所層理論を用いた証明を持っていた。そこから次に考えるべきことは、トーリック多様体を越えた範囲で、ミラー対称性を証明したい。同様に超局所層理論のテクニックをつう為には、もっと広いクラスのシンプレクティック幾何で超局所層理論と深谷圏を結び付けなければならない。研究開始当初には、すでに

Ganatra-Pardon-Shende による Weinstein 多様体に対する結果がアナウンスされていた。さらに広いクラスとして目指すべきは、コンパクトシンプレクティック多様体の深谷圏を超局所層理論による理解である。

3. 研究の方法

コンパクトでないクラスに対して、超局所層理論をもちいてミラー対称性を証明する、というのは悪くないアイデアである。しかし、超局所層理論と深谷圏をつなぐ部分はすでに Ganatra-Pardon-Shende の結果があるので、その定理を応用する話になる。当初をはそのような方向性も研究していたが、多くの競争相手や競合がいると考えた。そこで、コンパクトシンプレクティック多様体の方を狙って行くほうがより独自性があると考え、そちらを追求していった。まずは、Tamarkin や Tsygan のトーラスの場合の深谷圏と超局所層理論の類似計算を厳密化することを当初は行った。これは今のところ論文にしていけないが、Tamarkin の層量子化の手法を深く理解することが、コンパクト多様体の深谷圏を理解する上で不可欠と考え、その研究に多く注力した。

4. 研究成果

本科研費の研究機関を通じてさまざまな研究を行ったが、大きな柱はホモロジー的ミラー対称性、Riemann-Hilbert 対応の超局所層理論による理解、それによる層量子化の一般化である。

まず、ホモロジー的ミラー対称性については、上述のトーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性を超局所層理論的に証明した論文が出版された。手法としては、アファインの場合の証明を貼り合わせることで一般の証明を与えた。この研究は他の研究者によっても多くのフォローアップが行われた：例えば Gammage-Shende によるトーリック退化のミラー対称性の証明や、Zhou による VGIT のミラー記述への応用などが与えられ、現在では、超局所層理論的にミラー対称性を証明する際の一つの出発点となっている。また、Donovan 氏との研究では、この研究を応用して、偏屈圏のミラー対称性を定式化し証明を行なった。偏屈圏とは、偏屈層のカテゴリー化であり、ミラー対称性の文脈では、量子微分方程式の解の偏屈層のカテゴリー化として自然に現れる。ホモロジー的ミラー対称性の族版として、偏屈圏のミラー対称性は自然に考えられるが、そのような最初の例を与えることができた。

他方、不確定型 RH 対応および WKB 解析の層理論的なシンプレクティック幾何を追求を行なった。これは当初は純粋な興味からサイドワークとして始めたのだが、期せずして、本研究の目的と深く関わるようになった。

まず、RH 対応とは D 加群の圏と構成可能層の圏の圏同値である。これは柏原によって 80 年代に証明された。ただし、 D 加群には確定型という仮定をおくことが本質的であった。近年、 D' Agnolo と柏原は同値を、確定型とは限らない D 加群に拡張した。ただ、構成可能層では足りず、構成可能強化型帰納層と呼ばれる対象を考えなければいけない。この対象は、Tamarkin によるシンプレクティック幾何の研究に現れたものと類似しているが、明確な関係はよくわからなかった。

Tamarkin によるシンプレクティック幾何の研究では、余計な変数 t というものを考えることが革新的なアイデアだった。 D' Agnolo-柏原も同様に余計な変数 t を考える。もともとの Tamarkin の(あまりうまく実現されていなかった)もくろみは、この t をもちいて Novikov 環という、シンプレクティック幾何における代表的な係数を実現することにあった。私は、その目論見の哲学に則り、 D' Agnolo-柏原の理論を Novikov 環を使った理論に置き換えた。それにより、彼らの定式化よりも、確定型 RH 対応に近い理論を作ることができた。

その研究の中で、 D' Agnolo-柏原の解の層と、微分方程式の不確定タイプの層量子化が似たものであるという感覚を得ることができた。そして、別の機会に完全 WKB 解析と層量子化の関係を考え始めることになり、完全 WKB 解析の解の層は、層量子化とほぼピッタリと一致するということを見つけた。ただし、「ほぼ」を取り除くには、層量子化の理論を群 R についての同変理論にする必要があった。これは当初、技術的な道具であると考えていた。しかし、研究をすすめるうちに、 R 同変理論にした結果、Novikov 環が自然に実現されることが判明し、期せずして Tamarkin の目論見を実現することができた。

さらに考察を進めると、 R 同変理論は、Tamarkin や Guillermou による層量子化の非完全ラグランジアンへの一般化を行う上で欠けていたピースであることがわかった。層量子化の理論はフレアー理論と並行すると期待されているわけであるが、その期待通り、深谷-Oh-太田-小野の bounding cochain の理論の類似物が層理論の枠内で実現されることがわかった。これについては現在論文を準備中である。

結局、コンパクト多様体での非完全ラグランジアンを考える一つ手前のステップである、非コンパクト多様体での非完全ラグランジアンの層理論的取り扱いに関する大きな進歩を得ることが

できた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Donovan W., Kuwagaki T.	4. 巻 381
2. 論文標題 Mirror Symmetry for Perverse Schobers from Birational Geometry	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 453 ~ 490
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03916-9	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kuwagaki Tatsuki	4. 巻 16
2. 論文標題 Categorification of Legendrian knots	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 421 ~ 437
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/pamq.2020.v16.n3.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kuwagaki Tatsuki	4. 巻 169
2. 論文標題 The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric stacks	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Duke Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 2125 - 2197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/00127094-2020-0011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Donovan W., Kuwagaki T.	4. 巻 381
2. 論文標題 Mirror Symmetry for Perverse Schobers from Birational Geometry	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 453 ~ 490
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03916-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kuwagaki Tatsuki	4. 巻 157
2. 論文標題 Irregular perverse sheaves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 573 ~ 624
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/s0010437x20007678	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ike Yuichi, Kuwagaki Tatsuki	4. 巻 55
2. 論文標題 Categorical Localization for the Coherent-Constructible Correspondence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 1 ~ 24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/55-1-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計31件 (うち招待講演 29件 / うち国際学会 22件)

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 An introduction to sheaf-theoretic study of symplectic geometry
3. 学会等名 Lectures series, Academia Sinica (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and Riemann-Hilbert correspondence
3. 学会等名 Geometry, Symmetry and Physics Seminar, Yale University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Riemann--Hilbert correspondence and WKB analysis
3. 学会等名 Mathematics Department Colloquium, Osaka University (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization of Lagrangian submanifolds
3. 学会等名 Complex Geometry symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Exact WKB analysis and Riemann--Hilbert correspondence
3. 学会等名 Exact WKB Analysis, Microlocal Analysis, Painleve Equations and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and exact WKB analysis
3. 学会等名 MSJ Autumn meeting
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and principal cluster variety
3. 学会等名 Infinite Analysis 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Exact WKB analysis and sheaf quantization
3. 学会等名 Around D-modules nowadays (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and cluster coordinate
3. 学会等名 South Osaka Algebra seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and irregular singularity
3. 学会等名 Geometric representation theory seminar, YMSC (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization: example and construction
3. 学会等名 Representation theory seminar, RIMS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and exact WKB analysis
3. 学会等名 QMAP seminar, UC Davis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Symplectic geometry of exact WKB analysis
3. 学会等名 Freemath seminar, King`s college London (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Symplectic geometry of exact WKB analysis
3. 学会等名 代数幾何学セミナー、大阪大学(online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization from spectral network
3. 学会等名 GTM seminar, Kavli IPMU (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and cluster coordinate
3. 学会等名 紀尾井町セミナー、城西大学(online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization from spectral network
3. 学会等名 Math seminar, Michigan State University (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Cluster coordinates from sheaf quantization of spectral curve
3. 学会等名 Legendrian, cluster algebras, and mirror symmetry, IBS-CGP, Korea (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Lecture series (4 hours) on symplectic geometry in algebraic analysis
3. 学会等名 Legendrian, cluster algebras, and mirror symmetry, IBS-CGP, Korea (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization and exact WKB analysis
3. 学会等名 RANT seminar, CUHK(online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Exact WKB analysis, Fukaya category and RH correspondence
3. 学会等名 代数解析幾何セミナー、鹿児島大学(online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Sheaf quantization from exact WKB analysis
3. 学会等名 日本数学会年会 2021年3月17日
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Irregular Riemann--Hilbert correspondence and Novikov ring
3. 学会等名 Workshop on Riemann-Hilbert correspondence and D-modules, Humbolt University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Riemann--Hilbert correspondence and Fukaya category
3. 学会等名 Homological Algebra Microlocal analysis and Symplectic topology, CIRM, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Riemann--Hilbert correspondence and Fukaya category
3. 学会等名 Rikkyo Math Phys seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Microlocal and Fukaya categories of higher genus surfaces and their products
3. 学会等名 Categorical and analytic invariants in algebraic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Microlocal category of higher genus surfaces and their products
3. 学会等名 Seminar on symplectic geometry (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Irregular Riemann--Hilbert correspondence and Novikov ring
3. 学会等名 Workshop on Riemann-Hilbert correspondence and D-modules (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Categorification of Legendrian knots
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry IV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Riemann--Hilbert correspondence and Fukaya category
3. 学会等名 UC Berkely Mathematics Department Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 桑垣樹
2. 発表標題 Irregular Riemann--Hilbert correspondence, irregular perverse sheaves, and Fukaya category
3. 学会等名 Hayama symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Tatsuki Kuwagaki's webpage https://member.ipmu.jp/tatsuki.kuwagaki/indexjpn.html

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------