

令和 4 年 5 月 24 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13410

研究課題名（和文）無限次元タイヒミュラー空間上のWeil-Petersson計量の幾何学的性質

研究課題名（英文）Geometric structure of Weil-Petersson metric on infinite dimensional Teichmüller space

研究代表者

柳下 剛広 (Yanagishita, Masahiro)

山口大学・大学院創成科学研究科・講師

研究者番号：60781333

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究はコンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間上で定義されるWeil-Petersson計量を非コンパクトリーマン面の2乗可積分タイヒミュラー空間の場合へと拡張した場合に、既存の場合と同様な結果が得られるかを主眼としている。本研究結果として、Weil-Petersson計量から誘導されるWeil-Petersson距離が、いくつかのリーマン面の場合を除いて非完備となることを、既存の場合と同様に示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非コンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間の幾何学的構造はコンパクトリーマン面の場合とは異なり、カオス的な様相を垣間見せる。その主な原因は非コンパクトリーマン面には理想境界と呼ばれる果ての無い部分を持つことにある。

コンパクトリーマン面の場合には、Weil-Petersson計量が非完備であることからその完備化を考えることができ、その境界成分にはノードと呼ばれる結節点を持つリーマン面が現れる。本研究結果により、非コンパクトな場合でもその完備化の境界成分に何が現れるかを考察することが可能となった。

研究成果の概要（英文）：This research is aimed at considering whether the Weil-Petersson metric on the square Teichmüller space of non-compact Riemann surfaces, which is a generalization on that of compact ones, has the same properties as the compact case.

The researcher proved that the Weil-Petersson distance induced by the Weil-Petersson metric is non-complete except for the case of a few Riemann surfaces, which is originally showed in the case of compact Riemann surfaces.

研究分野：複素解析学

キーワード：タイヒミュラー空間 擬等角写像 リーマン面 Weil-Petersson計量

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年、非コンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間が盛んに研究され始め、コンパクトな場合とは異なるカオスな事象が多数存在することが明らかになった。例えば、タイヒミュラー空間の任意の点と基点を結ぶ測地線は、コンパクトな場合においてはただ1つであるが非コンパクトな場合は一般に非可算個存在することがある。本研究はこのような一連の研究の中に属している。

2. 研究の目的

本研究は2つの研究テーマから成る。1つはWeil-Petersson計量とFenchel-Nielsen座標との関係に関する研究(研究テーマ1)であり、もう1つはWeil-Petersson計量から誘導される距離の完備化に関する研究(研究テーマ2)である。まず、タイヒミュラー空間とは標識付きリーマン面の变形空間のことで、基点となるリーマン面およびその面上の擬等角写像からなる集合をある位相的同値関係で割った商空間である。コンパクトリーマン面においては、タイヒミュラー空間は有限次元複素多様体となり、Weil-Petersson計量はその上で標準的に定義されるエルミート計量である。非コンパクトリーマン面の場合、一般にタイヒミュラー空間は無限次元複素バナッハ多様体であり、大域的にエルミート計量は定義できない。研究対象である2乗可積分タイヒミュラー空間は、Weil-Petersson計量を定義可能とするタイヒミュラー空間の真部分距離空間である。

3. 研究の方法

研究テーマ1について、Fenchel-Nielsen座標はリーマン面をパンツ分解したときに現れる境界測地線の長さとそのでのねじれをパラメータとする、タイヒミュラー空間の大域的座標の一種である。Wolpertはこの座標の変分を用いた2次微分形式でWeil-Petersson計量を表現できることを示した。この公式が非コンパクトリーマン面の2乗可積分タイヒミュラー空間上のWeil-Petersson計量の場合でも成立することを証明する。

研究テーマ2について、有限次元の場合、Weil-Petersson計量から誘導されるWeil-Petersson距離は非完備であることをWolpertが示した。無限次元の場合でもこの結果は正しいと予想される。WolpertはJenkins-Strebel微分というリーマン面上の正則2次微分形式から誘導されるベルトラミ係数のコーシー列を用いて非完備性を示した。この微分形式は一般のリーマン面に対しても円環分割を決めれば定まるので、そこから証明を行うことは可能であると推測する。次に、2乗可積分タイヒミュラー空間を完備化したとき、境界成分に現れる曲面は何か、またWeil-Petersson計量が完備化した空間まで連続に拡張できるかを調査する。結果は有限次元の場合と同様にノード付きリーマン面になると予想する。問題は理想境界の近傍上での変形の振る舞いがコンパクトリーマン面の場合と近似できるかどうかである。

4. 研究成果

研究テーマ1について、予測していた結果が得られなかった。コンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間の場合、本質的にはWolpertの不等式と呼ばれる、2つのリーマン面上の単純閉測地線の長さをその間の擬等角写像で比較する不等式である。これが2乗可積分タイヒミュラー空間の双曲2乗ノルムに関しても成立すると予想して研究を進めたが進展しなかった。

研究テーマ2について、予測していた結果が得られた。厳密には、いくつかのリーマン面を除いてWeil-Petersson距離は非完備であることを示した。さらにこの結果は、 p 乗可積分タイヒ

ミューラー空間と呼ばれる, 2乗可積分タイヒミュラー空間の一般化の上で定義されるp-Weil-Petersson計量の非完備性へと拡張できた. 主な証明方法は Lehner 条件を満たすリーマン面を円環領域となるように切り開き, その手法に付随するJenkins-Strebel微分を用いる. さらにその正則2次微分形式を用いてペルトラミ係数を構成する. 無限次元タイヒミュラー空間では, その構成の際にコンパクトな部分集合の外側でペルトラミ係数の値を0とするcut-offを行う必要が生じる. それをヘルダーの不等式を用いることでWolpertの照明の場合と同様な手法で該当の結果を得られた. 本結果は学术论文にまとめ学術誌「Conformal Geometry and Dynamics」に掲載決定している.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masahiro Yanagishita	4. 巻 -
2. 論文標題 Completeness of p-Weil-Petersson distance	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 柳下剛広
2. 発表標題 2乗可積分タイヒミュラー空間上のWeil-Petersson計量の完備性について
3. 学会等名 2019年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masahiro Yanagishita
2. 発表標題 Completeness of p-Weil-Petersson distance
3. 学会等名 Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柳下 剛広
2. 発表標題 Complex analytic structure of the p-integrable Teichmüller space
3. 学会等名 研究集会「Riemann surfaces and related topics」（招待講演）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------