様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　５月３１日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：若手研究
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ１３４１２

研究課題名（和文）曲率次元条件を満たす測度距離空間の研究とそのリーマン幾何への応用

研究課題名（英文）Study of metric measure spaces with curvature-dimension conditions and its applications to Riemannian geometry

研究代表者
北別府　悠（Kitabeppu, Yu）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・准教授

研究者番号：５０７２８３５０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：RCD 空間上ではかなり一般的な解析ができることが知られている．そこで使われている手法は空間の滑らかさに依存しない適用範囲の広いものであって，崩壊した多様体などにも応用できる．本研究ではこれらの手法を用いてリーマン幾何と測度距離空間の幾何の双方に関係する領域についての結果をいくつか得た．
一つはラプラシアンの固有値に関する Zhong-Yang 型の剛性定理であり，もう一つはハイパーグラフ上の曲率の研究である．前者は RCD 空間においても非負リッチ曲率の仮定の下で多様体と同様の剛性が成り立つことを示し，後者では熱流を用いて曲率の定義を与え，いくつかの幾何学的な結論を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
ハイパーグラフはネットワークのモデルなどとしてよく使われており、特に近年ハイパーグラフ上の熱の伝わりかたに関する研究もよくされている。ハイパーグラフ上に熱流、正確にいえば非線形ラプラシアンから定まるレゾルベント、を用いた曲率の定義を与えたことで、今後ハイパーグラフ上の現実的な問題に関しても応用があると期待される。

研究成果の概要（英文）：It is known that we can use much techniques of calculus on RCD spaces, which can be applied to wide class including collapsed manifolds.
Roughly, we have the following two results: One is the Zhong-Yang type rigidity theorem for RCD spaces, and another is giving a definition of Ricci curvature on hypergraphs associated with the heat flow.

研究分野：測度距離空間の幾何

キーワード：熱流

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

Ricci 曲率が下に有界なリーマン多様体について調べるためにそのようなリーマン多様体の Gromov-Hausdorff 極限となる特異空間を調べる方法がある。Cheeger-Colding はその方法を推し進め、Cheeger-Colding 理論と呼ばれる非常に深い理論を展開した。Cheeger-Colding 理論の要は Cheeger-Gromoll の分裂定理の "almost" 版であり、局所的に調和関数を構成し Gromov-Hausdorff 収束に沿って関数の収束も論じることがキーポイントになっている。他方断面曲率の場合はリーマン多様体の極限としての特異空間だけではなく、 Alexandrov 空間と呼ばれる「断面曲率が下に有界な距離空間」の研究が存在する。 Cheeger-Colding は「Ricci 曲率が下に有界」という概念を定義するためには距離だけではなく、 測度も備えた測度距離空間が必要であることを見抜いていた。

その後 Lott-Villani、 Sturm らにより最適輸送理論を用いた曲率次元条件と呼ばれる概念が測度距離空間上に定義された。 これは測度距離空間上に「Ricci 曲率が下に有界で、 次元が上に有界である」という概念を定義したものであるが、 ある種のフィンスラー多様体を例として含んでいた。 Ricci 曲率が下に有界なリーマン多様体の列の極限はフィンスラー多様体には決してならないことが知られており、 曲率次元条件だけでは不十分である。 この問題を解決するために考えられた無限小ヒルベルト的という条件を加えたリーマン的曲率次元条件(RCD 条件)を満たす測度距離空間を RCD 空間と呼ぶ。

RCD 空間は一般に非常に特異な局所構造を持ちうるが、 Cheeger-Gromoll の分裂定理が成り立つなど、リーマン多様体上で知られているかなりの数の幾何学的、解析的な定理が成り立つ。しかしながら証明に使われる手法はリーマン多様体の場合とはかなり異なる。 それは RCD 空間上では微分などはほとんど至る所でしか意味を持たず、 通常の意味での微分幾何学的な議論をそのまま走らせることができないからである。 しかし RCD 空間では熱流を用いた様々な手法が発展してきており、 それらを用いて証明がなされることが多い。 例えば先に述べた Cheeger-Gromoll の分裂定理の RCD 空間版は熱流の解析を至る所で用いており通常の分裂定理で重要となるヘッシアンの解析を経由せずに証明を行っている。つまり熱流を用いた研究は測度距離空間の微分構造の欠損を補うために発展したものであるから、 リーマン多様体であえて遠回りする証明を使用することはほとんどなかったと言って良い。 また RCD 空間そのものの研究はあるが、 そのリーマン幾何への応用というべきものはそれほどなかった。

２．研究の目的

本研究の目的は大きく言えば Ricci 曲率とは何か、そして下限条件がもたらす幾何学的、解析的な意味とは何かということを調べることであり、具体的に言えば RCD 空間の研究手法を応用することでリーマン多様体の研究を進めることであった。

「背景」でも述べたように Ricci 曲率の下限条件は測度距離空間上で初め曲率次元条件として定義されたが、リーマン幾何学の対応する結果を得るためにはリーマン的という条件が必要である。実際 Cheeger-Gromoll の分裂定理が成り立たない Finsler 多様体で曲率次元条件自体は満たすものが存在する（例えばユークリッド空間に内積からは定まらないようなノルムをいれ、通常の Lebesgue 測度を備えた測度距離空間がそのような例になっている)。つまり大袈裟に言えば RCD 空間というのは Ricci 曲率の本質を特徴づけたものであり、RCD 空間の手法を用いてリーマン幾何の研究をすることは言い換えれば Ricci 曲率とは何かという問いに答えるための第一歩であると言える。そのために RCD 空間の定義や手法のどの部分が本質的に曲率の特徴を捉えることができるのかを調べる。

もちろん多様体上では RCD 空間であることと、曲率の下限条件が同値であることが知られているが、一方例えばグラフなどに代表される離散空間では Ricci 曲率の下限条件というのはいくつかの定義が提案されているが、それらの間の関係も未だはっきりしていない。また Ricci 曲率が下に有界であることよりも弱い仮定として測度の二倍条件と Poincare 不等式を備えた測度距離空間、ＰＩ空間という、の研究なども活発にされている。したがってこれらの Ricci 曲率の下限条件らしきものと RCD 空間との比較も行いつつ研究を行うのが目的であった。

３．研究の方法

「目的」の項目でも述べたが、 RCD 空間の研究で発展してきたいくつかの手法、主には熱流の解析を用いることでリーマン幾何学の研究をすることと、 RCD 空間で成り立つような性質から Ricci 曲率の下限条件の本質を探ることが目的である。

RCD 空間は局所的にも大域的にも複雑になりうるが、一次元の RCD 空間は距離空間として完全に分類が与えられており、測度は Hausdorff 測度に絶対連続で、その密度関数は曲率の下限と

次元の上限から定まるある種の凸性を持つことが知られている。最適輸送理論の応用により、RCD 空間は確率測度の輸送を通じて一次元 RCD 空間の族によって分解されることが Cavalletti-Mondino らによって証明された。この手法を用いて Cavalletti-Mondino らは等周不等式やラプラシアンの固有値の剛性定理を示した。そこでこの技法を用いて別の仮定の下でのラプラシアンの固有値に関する剛性定理を導くことにした。この定理の証明ではこの分解定理だけでなく熱流や Gamma 計算など RCD 空間の性質をフルに活用した。特に Gigli や Savare らにより整備された高階の微分、あるいはテンソルの概念を使っている。これらは一般の測度距離空間ではなく RCD 空間だからこそ有用であり、曲率の下限条件及び次元の上限条件が本質的である。

また、先に述べたように離散空間では Ricci 曲率の多様な定義が存在する。離散距離空間は測地距離空間ではないので通常の曲率次元条件の定義をそのまま適用することができず、さまざまな工夫が必要である。ハイパーグラフ上では非線形エネルギーの劣微分として非線形かつ多価のラプラシアンの解析がなされていたので、このラプラシアンを主役にして曲率次元条件の類似を定義できないかと模索した。特にグラフ上でランダムウォークに関する Kantorovich 双対性がラプラシアンで表現できることに注目し関数解析的な手法を用いて曲率を定義することにした。

４．研究成果

主目的は Ricci 曲率に関する研究であるが、研究対象はいくつかにわたる。本研究課題を通じて主に三つの研究を行った。それらは、RCD 空間特有の技術を使ったリーマン幾何学に対する研究、シンプレクティックトーリック多様体のモジュライ空間に関する研究、ハイパーグラフ上の凸性の低い非線形ラプラシアンから定まる熱流を用いた幾何的考察である。具体的に述べよう。

まず一つ目に挙げられるのは共同研究者(Christian Ketterer 氏、 Sajjad Lakzian 氏)とともに非負 Ricci 曲率をもつ RCD 空間の Zhong-Yang 型のスペクトルギャップ問題についての研究を行なった。特に RCD 空間で近年発展している needle decomposition と呼ばれる、空間を一次元の RCD 空間に分割する手法を用いてスペクトル剛性定理を証明した。

次に挙げるのは今までとは異なりシンプレクティック幾何に関する研究である。RCD 空間の定義はいくつかあるが、 L2-Wasserstein 空間と呼ばれる確率測度のなす空間上の相対エントロピーと呼ばれる汎関数の凸性によって曲率の下限条件を定義することができる。共同研究者(藤田玄氏、三石史人氏)とともに L2-Wasserstein 距離を用いてコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体のモジュライ空間に新しい距離を定義した。シンプレクティックトーリック多様体の崩壊現象を捉えるためにこの距離を定義したが、今のところは非崩壊の場合についての結果を得ている。崩壊する場合の取り扱いについても現在継続して研究中である。崩壊する場合は一般に Ricci 曲率が負の無限大に発散してしまうことがあるので通常の RCD 空間や Ricci limit 空間の研究をそのまま適用することができず、新しい手法を開発する必要があるので非常に挑戦的な課題であると言える。

最後はハイパーグラフ上の Ricci 曲率の研究である。そもそもグラフ上で coarse Ricci 曲率と呼ばれる曲率が定義されている。これはグラフ上のマルコフ連鎖の L1-Wasserstein 距離を用いて定義される。しかしハイパーグラフを考えるとある意味で標準的なマルコフ連鎖が存在しない。それはハイパーグラフ上で考えているラプラシアンが非線形であり、対応する確率過程が存在しないことによる。しかしハイパーグラフラプラシアンは Hilbert 空間上の凸かつ下半連続なある汎関数の劣微分であるので極大単調作用素の一般論が使える。そこで L1-Wasserstein 距離の代わりに Kantorovich 双対性からヒントを得た新しい距離関数を定義した。この距離関数を用いてグラフの coarse Ricci 曲率の類似である曲率を定義した。この曲率はグラフの場合は coarse Ricci 曲率と一致しており、いくつかの RCD 空間で知られている幾何学的、解析的な性質を導くことも証明できた（池田正弘氏、上原崇人氏、高井勇人氏との共同研究）。さらに Cheng の最大直径定理に対応する定理も示すことができ、この定義が「良い」ことを客観的に確かめることができた（松元咲里南氏との共同研究）。

また論文の publish はまだであるが、１次元 RCD 空間においてはラプラシアンの固有値に関するワイルの法則が常に成り立つことを示した（岩橋明美氏、米倉明里氏との共同研究）。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Kitabeppu Yu、Matsumoto Erina	４．巻 75
２．論文標題 Cheng's maximal diameter theorem for hypergraphs	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 119~130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj.20211202	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kitabeppu Yu	４．巻 印刷中
２．論文標題 A Sufficient Condition to a Regular Set Being of Positive Measure on Spaces	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Potential Analysis	６．最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11118-018-9708-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Ketterer Christian、Kitabeppu Yu、Lakzian Sajjad	４．巻 228
２．論文標題 The rigidity of sharp spectral gap in non-negatively curved spaces	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Nonlinear Analysis	６．最初と最後の頁 113202～113202
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2022.113202	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　12件／うち国際学会　3件）

１．発表者名 北別府悠
２．発表標題 Zhong-Yang 型スペクトルギャップの剛性定理
３．学会等名 確率論と幾何学（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 北別府悠
２．発表標題 Delzant多面体の収束と対応するトーリック多様体の収束の関係について
３．学会等名 第67回 幾何学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 北別府悠
２．発表標題 Rigidity theorem of Zhong-Yang type spectral gap for RCD(0,N) spaces
３．学会等名 Elliptic and Parabolic Zoom Seminar（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 北別府悠
２．発表標題 ハイパーグラフ上のリッチ曲率
３．学会等名 リーマン幾何と幾何解析（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 北別府悠
２．発表標題 Lin-Lu-Yau の coarse Ricci 曲率について
３．学会等名 Study meeting on graphs and curvature（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名
北別府悠

２．発表標題
ハイパーグラフ上の Ricci 曲率について

３．学会等名
淡路島幾何学研究集会2020（招待講演）

４．発表年
2020年

１．発表者名
Yu Kitabeppu

２．発表標題
Convergences of symplectic toric manifolds and the corresponding Delzant polytopes

３．学会等名
Geometry and Probability（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
北別府悠

２．発表標題
Delzant 多面体の収束と対応する多様体の収束について

３．学会等名
淡路島幾何学研究集会2019（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名
北別府悠

２．発表標題
閉凸集合の間の新しい距離について

３．学会等名
福岡大学微分幾何学研究集会2018（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名 Yu Kitabeppu
２．発表標題 The lower semi-continuity of the dimension of RCD spaces under the Gromov-Hausdorff convergence
３．学会等名 4-th China-Japan Geometry conference（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 北別府悠
２．発表標題 ハイパーグラフ上のリッチ曲率
３．学会等名 第69回幾何学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 Yu Kitabeppu
２．発表標題 Coarse Ricci curvature on hypergraphs
３．学会等名 第７回日中幾何学研究集会（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関