

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13413

研究課題名（和文）ヘッセンバーク多様体の族と可積分系

研究課題名（英文）The family of Hessenberg varieties and integrable systems

研究代表者

阿部 拓 (ABE, Hiraku)

岡山理科大学・理学部・講師

研究者番号：00736499

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、ヘッセンバーク多様体と可積分系の関係の研究を軸に、ヘッセンバーク多様体の幾何学的な性質の研究を行った。大きな成果の一つとして、特別なヘッセンバーク空間から定まるヘッセンバーク多様体の成す族の上に完全可積分系を構成したことが挙げられる。他にも、正則半単純なヘッセンバーク多様体が（弱）Fano多様体になるための必要十分条件を決定したことや、Peterson多様体の整数係数コホモロジー環の環構造の決定、Peterson-Schubert calculusの幾何学的な解釈を与えたこと、正則冪零なヘッセンバーク多様体が正規代数多様体になるための必要十分条件を決定したことなどが挙げられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ヘッセンバーク多様体は比較的新しい研究対象であり、幾何学・表現論・組合せ論の新たな架け橋として近年活発に研究されている。これまではヘッセンバーク多様体のトポロジーを中心に様々な研究が進められ、その幾何学は未知の部分が多かった。本研究課題はこの点に注目し、可積分系との関係を軸にヘッセンバーク多様体の幾何学について研究を行ったものである。

ヘッセンバーク多様体については研究すべき問題が豊富に残っており、若手の研究者や大学院生でも挑戦できる問題も沢山ある。このようなテーマの基礎となる幾何学を研究し、その性質を明らかにすることは意義のあることと考えられる。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we study geometric properties of Hessenberg varieties, centering on studying the connection between Hessenberg varieties and integrable systems.

As one of the achievements, we proved that the family of Hessenberg varieties which are defined for a specific Hessenberg space admits a completely integrable system. Also, we determined a necessary and sufficient condition for a regular semisimple Hessenberg variety to be a (weak) Fano variety, and we determine the ring structure of the integral cohomology of Peterson variety, and we gave a geometric interpretation of Peterson Schubert calculus, and we determined a necessary and sufficient condition for a regular nilpotent Hessenberg variety to be a normal algebraic variety.

研究分野：幾何学

キーワード：旗多様体 ヘッセンバーク多様体 Peterson多様体 完全可積分系 弱Fano多様体 コホモロジー環

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

申請者はヘッセンバーク多様体の幾何学を調べており、特にその族が持つ性質に関心を持っていた。ちょうどその頃、Crooks-Rayan らによる可積分系に関する論文が発表され、応募者はその論文を見て、ヘッセンバーク多様体の族と関係があることに気がついた。Crooks 氏とは以前に共同研究を行った経験があったことから、Crooks 氏と連絡をとり、応募者が調べていた「ヘッセンバーク多様体の族」と Crooks-Rayan らが調べていた「可積分系」の関係について共同研究を行うことにした。ヘッセンバーク多様体の特別な例として Peterson 多様体があり、可積分系の戸田格子と Peterson 多様体が密接な関係にあることは以前から知られていたが、「ヘッセンバーク多様体の族」と可積分系の関係に注目するという視点は新しいものであった。

また、個々のヘッセンバーク多様体については、正則半単純なヘッセンバーク多様体がいづ Fano 多様体になるか、正則冪零なヘッセンバーク多様体がいづ正規代数多様体であるか、といった問題や、Peterson 多様体のコホモロジー環の構造とその上の Peterson Schubert calculus など、様々な興味深い問題が未解決であった。

2. 研究の目的

Crooks-Rayan らは、複素半単純代数群を用いて可積分系（以下、Crooks-Rayan 系）が構成できることを論文で発表していた。この可積分系は、ヘッセンバーク多様体の族と似た性質をいくつか持っていたため、「Crooks-Rayan 系」と「ヘッセンバーク多様体の族」の関係を明らかにすることを目的として共同研究を始めた。

また、個々のヘッセンバーク多様体については、これまでトポロジーの観点からの研究が主流であったが、本研究ではその幾何学的な性質をヘッセンバーク関数の言葉で具体的に解明することを目的とした。

3. 研究の方法

まず、Crooks-Rayan 系からヘッセンバーク多様体の族への自然な埋め込みが構成できることが分かったので、ヘッセンバーク多様体の族は Crooks-Rayan 系の第一積分のファイバーをコンパクト化する空間であることが分かった。そこで、Crooks-Rayan 系のシンプレクティック構造やその上の完全可積分系がヘッセンバーク多様体の族の上に延長できるかどうかを調べることにした。また、Peterson 多様体と戸田格子が密接に関係しているのは知られていたもので、戸田格子と Crooks-Rayan 系の関係を調べ、それを踏まえて戸田格子とヘッセンバーク多様体の族の関係を調べることにした。

個々のヘッセンバーク多様体については、旗多様体における Schubert 多様体の類似物をヘッセンバーク多様体上で考えることで、ヘッセンバーク多様体の幾何学の解明を目指した。この手法は以下で述べる研究成果の(2)(3)において実際に効果的な役割を果たした。

4. 研究成果

(1) Peter Crooks 氏(Northeastern University)との共同研究で、ヘッセンバーク多様体の族と可積分系の関係を調べた。以下、この研究について説明する。

ヘッセンバーク多様体のうちよく知られたものとして、Peterson 多様体や、ルート系に付随するトーリック多様体などがあるが、これらを定めるヘッセンバーク空間は同一のものである。このヘッセンバーク空間を H_1 と書き H_1 から定まるヘッセンバーク多様体全体のなす空間 $X(H_1)$ を考えると、この族は Peterson 多様体やルート系に付随するトーリック多様体を含み、さらに旗多様体上のベクトル束になっている。我々はまず、 $X(H_1)$ 上に自然な正則ポアソン構造が存在すること、及び Mishchenko-Fomenko 多項式を用いることで $X(H_1)$ 上の完全可積分系が構成できることを示した。さらに、このポアソン多様体 $X(H_1)$ が稠密な開シンプレクティック葉を持ち、そこに第一積分を制限して考えたものが以前 Crooks-Rayan によって考察されていた可積分系に一致すること、及びそれがよく知られた可積分系である戸田格子を部分系として含んでいることを証明した。また、これらの関係を調べる過程において、 H_1 から定まる正則なヘッセンバーク多様体の特異点集合の記述についても応用を得た。この共同研究をまとめた論文は "Hessenberg varieties, Slodowy slices, and integrable systems" として *Mathematische Zeitschrift* に掲載された。

(2) 藤田直樹氏(東京工業大学)、曾昊智氏(华中科技大学)との共同研究で、ヘッセンバーク多様体がいづ Fano 多様体(または弱 Fano)多様体になるのかを調べた。以下、この研究について説明する。

A 型の正則半単純なヘッセンバーク多様体が Fano 多様体(または弱 Fano 多様体)になるための必要十分条件について研究を行い、ヘッセンバーク関数の組合せ論的なデータを用いて、完全に

分類することに成功した.特に,ヘッセンバーグ関数が与えられれば,そこから定まる正則半単純なヘッセンバーグ多様体が Fano 多様体(または弱 Fano 多様体)であるかどうかは,単純かつ具体的な計算で確かめることができるようになった.証明においては, Schubert 多様体(より正確には Richardson 多様体)の幾何学が重要な役割を果たした.この研究結果の帰結として,正則半単純なヘッセンバーグ多様体の反標準束が nef ならば,それは必ず nef かつ big であることも分かった.この共同研究をまとめた論文は” Fano and Weak Fano Hessenberg Varieties ”として Michigan Mathematical Journal に掲載された.

(3)堀口達也氏(大阪市立大学数学研究所), 楢田英也氏(近畿大学工業高等専門学校), 曾昊智氏(華中科技大学)との共同研究で, Peterson Schubert calculus の幾何学的な背景を明らかにした.以下,この研究について説明する.

Peterson 多様体と Schubert 多様体の交わりを幾何学的な観点から考察し, Peterson 多様体のコホモロジー環において,この交わりの性質をよく反映する基底を構成した.この基底は,前述の交わりの幾何学的状況から様々な性質を導くことができ,特に, Peterson 多様体のコホモロジーの環構造の計算に適したものである.より正確には,基底同士の積を再び同じ基底で展開する際の係数(構造定数)を具体的に計算することができる.興味深いことに,この構造定数は全て非負整数である.この正值性についても幾何学的な立場から証明を与えた.また,我々はこの構造定数の組み合わせ論的な公式も与えた. Peterson 多様体のコホモロジー環の基底としては,原田-Tymoczko による基底が知られていたが,その幾何学的な意味は明らかでなかった.今回の共同研究で得られたもう一つの成果として,我々が幾何学的に構成した基底が原田-Tymoczko の基底と一致していることを示した.これにより,原田-Tymoczko の基底の幾何学的な意味が明らかになり,その諸性質が幾何学的に理解できるようになった.原田-Tymoczko の基底の構造定数は Goldin-Gorbutt による計算法が知られていたが,我々が得た構造定数の公式はこれとは別種の計算法である.この共同研究をまとめた論文は,現在研究雑誌に投稿中である.

(4)曾昊智氏(華中科技大学)との共同研究で, Peterson 多様体の整数係数のコホモロジー環の環構造を明示的に決定した.以下,この研究について説明する.

Peterson 多様体のコホモロジー環に関しては,複素数係数のコホモロジー環の先行研究があり,その構造はよく理解されていた.特に,環としての生成元とその基本関係式は具体的な形でよく分かっていた.整数係数のコホモロジー環については,良い生成元のリストは知られていたが,どのような基本関係式が必要なのかはまだ分かっていた.この基本関係式を見つけ出す際に, Peterson 多様体のコホモロジー環についての(3)の研究結果を応用できることが分かった.特に,(3)の研究において Peterson 多様体における幾つかの特殊な代数的部分集合がいつ交わるかという問題を解決していたことが,基本関係式の発見につながった.この意味で,今回発見した基本関係式は,単に代数的な関係式というだけでなく, Peterson 多様体の幾何の言葉で解釈できる関係式である.このような形で, Peterson 多様体の整数係数のコホモロジー環を(環としての)生成元と基本関係式の形で表すことに成功した.また,複素数係数のコホモロジー環では, Peterson 多様体のコホモロジー環は, permutohedral variety と呼ばれるトーリック多様体のコホモロジー環における対称群の表現の不変部分環と同型であるが,整数係数でも同様な同型写像が構成できることを証明した.この共同研究をまとめた論文は現在研究雑誌に投稿中である.

(5)Erik Insko 氏(Florida Gulf Coast University)との共同研究で,正則冪零なヘッセンバーグ多様体の代数幾何学的な性質について調べた.以下,この研究について説明する.

正則冪零なヘッセンバーグ多様体については,これまでコホモロジー環の構造がよく調べられてきたが,代数幾何学的な性質は未知の部分が多かった.そこで,正則冪零なヘッセンバーグ多様体の代数幾何学的な性質について, Eric Insko 氏と共同研究を行った.まず,トーラス作用の固定点が非特異であるための必要十分条件を調べ,それをヘッセンバーグ関数の言葉で具体的に記述した.さらに,その結果を応用し,正則冪零なヘッセンバーグ多様体が正規代数多様体であるための必要十分条件を(やはりヘッセンバーグ関数の言葉で)具体的に決定した.正則冪零なヘッセンバーグ多様体のうち特別なケースとして Peterson 多様体があるが, Peterson 多様体は(1次元の場合を除いて)正規でないことが知られている.実際,上で与えた必要十分条件は,与えられたヘッセンバーグ関数が, Peterson 多様体のヘッセンバーグ関数と同じ形をしている場所があるかどうかを判定している.この共同研究をまとめた論文は現在研究雑誌に投稿中である.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hiraku Abe, Naoki Fujita, and Haozhi Zeng	4. 巻 -
2. 論文標題 Fano and weak Fano Hessenberg varieties	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Michigan Math. J.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/20205971	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hiraku Abe, Naoki Fujita, and Haozhi Zeng	4. 巻 25
2. 論文標題 Geometry of regular Hessenberg varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Transform. Groups	6. 最初と最後の頁 305, 333
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-020-09554-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Abe Hiraku, Horiguchi Tatsuya	4. 巻 Volume 332
2. 論文標題 A Survey of Recent Developments on Hessenberg Varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 251, 279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-15-7451-1_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H. Abe and P. Crooks	4. 巻 291(3)
2. 論文標題 Hessenberg varieties, Slodowy slices, and integrable systems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 1093, 1132
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-019-02235-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計20件(うち招待講演 0件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 Hessenberg多様体
3. 学会等名 AGU表現論セミナー：幾何学と表現論を巡って
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 Peterson varieties and Cartan toric orbifolds
3. 学会等名 Toric topology 2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 Peterson多様体とトーリック軌道体
3. 学会等名 第4回 ヘッセンバーグ勉強会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 Peterson Schubert calculus
3. 学会等名 第24回 代数曲面ワークショップ at 半田山
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 A 型 Peterson-Schubert calculus の幾何と計算
3. 学会等名 変換群論の新潮流
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 Some computations in the cohomology of Peterson varieties
3. 学会等名 第3回 ヘッセンバーグ勉強会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 Peterson多様体の整係数コホモロジー
3. 学会等名 第2回 ヘッセンバーグ勉強会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 Geometry of Peterson Schubert calculus and its computations
3. 学会等名 Hessenberg seminars 2021-2022 in Osaka by Zoom
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 Geometry of Peterson Schubert calculus
3. 学会等名 ヘッセンバーグ勉強会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 On the integral cohomology ring of the Peterson variety
3. 学会等名 Toric topology in Osaka 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 Geometry of Hessenberg varieties
3. 学会等名 Geometry and Topology Seminar
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 The integral cohomology rings of Peterson varieties
3. 学会等名 Washington University weekend workshop on geometry and combinatorics
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 Toric topology of Peterson varieties
3. 学会等名 Washington University weekend workshop on geometry and combinatorics
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 Hessenberg varieties
3. 学会等名 Hamiltonian systems and Lie groups
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 On weak Fano Hessenberg varieties
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 On weak Fano Hessenberg varieties
3. 学会等名 第6回 代数幾何学研究集会 宇部
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 Introduction to Hessenberg varieties
3. 学会等名 Hessenberg集会 2018 in Osaka
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 An introduction to Hessenberg varieties
3. 学会等名 Hessenberg Varieties in Combinatorics, Geometry and Representation Theory
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiraku Abe
2. 発表標題 Topics in recent developments on Hessenberg varieties
3. 学会等名 Combinatorial Algebraic Geometry Retrospective Workshop
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 阿部拓
2. 発表標題 旗多様体上のあるベクトル束に現れる正則Poisson構造と完全可積分系について
3. 学会等名 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Northeastern University			
中国	華中科技大学			