

令和 5 年 10 月 27 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13420

研究課題名（和文）対称性を持つ部分多様体の安定性解析

研究課題名（英文）Stability analysis of submanifold with symmetry

研究代表者

梶ヶ谷 徹 (Kajigaya, Toru)

東京理科大学・理学部第一部数学科・助教

研究者番号：20749361

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：体積汎関数やエネルギー汎関数の臨界点として現れる極小部分多様体や調和写像は、部分多様体の微分幾何学において中心的な研究対象である。本研究では、そのような臨界点のうち、対称性の高いものについて、安定性を解析することを目的として、研究を行った。結果として、新しい計算手法の実装や、その中で用いられた鍵となる事実の一般化、および離散的な対象への拡張など、様々な方向性に研究が発展し、多くの成果を得る事ができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題の1つの研究対象であるラグランジュ部分多様体は、近年、活発な研究が続けられている重要な部分多様体のクラスである。本研究では、その安定性解析を目標として、極小部分多様体や調和写像論の中で発展した従来のアイデアを、対称空間論やトーリック幾何などの幾何学的な発想に基づきながら深化させ、新しい計算手法の実装や離散的対象への拡張など、様々な方向に研究を発展させた。

研究成果の概要（英文）：We studied the stability of submanifolds with symmetry, which appear as critical points of volume or energy functionals. These critical points are central objects in the differential geometry of submanifolds. The research resulted in various achievements, such as the implementation of new computational methods, generalization of key facts used in the methods, and extensions to discrete objects.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ハミルトン安定性 ラグランジュ部分多様体 エルミート対称空間 離散調和写像 重み付き有限グラフ 双曲曲面 ケーラーC空間 コンパクト対称空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

ケーラー多様体内の極小ラグランジュ部分多様体は、近年様々な観点から研究が進められている重要な研究対象である。カラビ・ヤウ多様体の特殊ラグランジュ部分多様体の場合は、そのホモロジー類内で体積最小性を持つという顕著な事実がよく知られているが、ケーラー多様体のリッチ曲率が正の場合には状況が異なり、そのような強い性質を持つラグランジュ部分多様体の例は一般にはあまり期待できない。しかし、90年代に入って、正のリッチ曲率を持つケーラー多様体内には、ハミルトンイソトピー類の中で体積最小性を持つラグランジュ部分多様体の例が存在することが発見され大きなインパクトを与えた。より一般に、ハミルトン変形のもとで体積汎関数の極小値をとり得るラグランジュ部分多様体をハミルトン安定と呼び、これまでに多くの例がいくつかのエルミート対称空間の中に発見されている。

また、ケーラー・アインシュタイン多様体内のラグランジュ部分多様体を初期値とする平均曲率流は、ラグランジュ性を保つことが知られており、これをラグランジュ平均曲率流(LMCF)と呼ぶ。LMCFは、初期値の平均曲率形式が完全形式であると、ハミルトン変形を生成することが知られており、その意味でも、エルミート対称空間などの特定のケーラー多様体内のハミルトン安定ラグランジュ部分多様体を分類することは応用上重要な問題であると考えられる。

しかし、一般にハミルトン体積最小性やハミルトン安定性を判定することは容易なことではなく、まずはより調べやすい具体的なクラスを組織的に構成することもまた重要な問題である。この問題に関しては、群作用による対称性を持つ例、すなわち、等質ラグランジュ部分多様体を考えることが1つの妥当な研究方針であるが、等質ラグランジュ部分多様体の構成と分類およびそのハミルトン安定性の解析などは、多くの場合に未解決である。

2. 研究の目的

本研究では、以下の目的のもと研究を行なった。

- (1) 特定のエルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の構成と分類、及びハミルトン安定性の解析。
- (2) 極小部分多様体や調和写像論において発展した安定性解析のための従来のアイディアの深化と応用。
- (3) 対称空間論やトーリック幾何などの幾何学的な発想に基づく新しい解析技術の発見。
- (4) LMCFなどの文脈で現れる様々な安定性の概念への応用。

3. 研究の方法

共同研究者の協力のもと、古典的なアイディアから最新の概念まで幅広い視野を持って研究を遂行した。対称空間論に詳しい橋永貴弘氏からは、エルミート対称空間に関する幾何学的および代数的な基本事項について多くのことを学び、可解群の作用により得られる等質ラグランジュ部分多様体の分類問題やエルミート対称空間の実現問題などについて多くの議論を行った。國川慶太氏からは、熱方程式の基礎事項や平均曲率流の特異点に関する最新の研究結果について多くの知識を得た。また、田中亮吉氏からは、離散的な幾何学的対象における変分問題を通して、リーマン面のタイヒミュラー空間の微分幾何学や曲面論に関する様々な事実を教示して頂いた。

また発表した論文は、多くの研究集会やセミナーなどで成果報告を行い、国内外の研究者から様々な意見をもらうことができた。さらに、関連する研究者を集めた国際研究集会の組織に関わるなど、国際共同研究推進に向けた活動を行ない、いくつかのテーマで国際共同研究を進めている。

4. 研究成果

主に次の成果を得た。

(1) 複素双曲空間内のトーラス作用の軌道として得られるラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性の解析を行なった。結果として、複素ユークリッド空間や複素射影空間の場合と異なり、不安定なトーラスが無数に現れること、その一方で軌道空間の重心に位置するトーラス軌道が際立って安定性を示すことを示した。また、すでに知られていた方法を用いて、ほとんど全てのトーラス軌道が体積最小性を有しないことも示した。安定性の証明においては、複素双曲空間と標準的なシンプレクティックベクトル空間の間にある同変なシンプレクティック微分同相写像を通して、ユークリッド空間内で解析を行うと言う新しい手法を実装した。

(2) (1)の安定性解析で用いたシンプレクティック微分同相写像を一般の非コンパクト型エルミート対称空間(HSSNT と略記)に拡張することを1つの動機として、HSSNT の同変の実現に関する研究を行った。この研究は橋永氏との共同研究である。HSSNT は、多様体としては、偶数次元のユークリッド空間と微分同相であり、複素多様体としては、複素ユークリッド空間内の有界領域として実現できる。さらに、シンプレクティック多様体としては、標準的シンプレクティックベクトル空間とシンプレクティック微分同相になることも知られていたが、それらの実現が共通して持つ「同変性」という性質に着目し、対称空間の持つ「極性」の観点から、以上の実現を統一的かつ幾何学的に構成する方法について考察し、コンパクト双対を含む一般のエルミート対称空間の同変の実現に関して多くの基本的結果を得た。

(3) 田中氏の協力のもと、重み付き有限グラフから双曲計量を持つリーマン面への離散調和写像に関して研究を行った。負曲率を持つリーマン多様体への離散調和写像は写像のホモトピー類の中でエネルギー最小となる事が知られているが、双曲計量全体を変数と見て動かし、適当な条件のもと、さらにエネルギーを最小化することができることを示した。さらにそのようにして得られる双曲計量は(適当な同一視の元)一意であることも証明した。これは、トーラスの場合に知られていた結果のリーマン面への拡張である。また、ターゲットの空間が非負曲率を持つ場合についても考察を行った。この場合には、離散調和写像のエネルギー最小性あるいは安定性は非自明な問題であるが、単連結コンパクト等質ケーラー多様体や階数が低い場合の単連結コンパクト対称空間内にはエネルギー安定な離散調和写像が存在し得ないことを証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 梶ヶ谷徹	4. 巻 2月号
2. 論文標題 グラフ上の変分問題-曲面上のグラフの標準実現-	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 40-47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Toru Kajigaya, Ryokichi Tanaka	4. 巻 4
2. 論文標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales Henri Lebesgue	6. 最初と最後の頁 1767-1807
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/ahl.116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Toru Kajigaya	4. 巻 300
2. 論文標題 Equivariant realizations of Hermitian symmetric space of noncompact type	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 2363-2411
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-021-02872-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kajigaya Toru, Kunikawa Keita	4. 巻 85
2. 論文標題 A convergence of generalized Lagrangian mean curvature flow in Kahler manifold with positive weighted Ricci form	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 205-214
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08510205	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toru Kajigaya	4. 巻 72
2. 論文標題 On Hamiltonian stable Lagrangian tori in complex hyperbolic spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 435 ~ 463
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/81158115	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toru Kajigaya	4. 巻 1
2. 論文標題 Some homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces & the 17th RIRCM-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop	6. 最初と最後の頁 183 ~ 193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計37件 (うち招待講演 27件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 離散調和写像によるグラフの最適な埋め込み
3. 学会等名 九大幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 離散調和写像によるグラフの最適な埋め込み
3. 学会等名 第6回幾何学的群論ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Hamiltonian stable Lagrangian tori in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 2nd GAPPF, Surfaces with Constant Mean Curvature (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 Equivariant realizations of Hermitian symmetric space of noncompact type
3. 学会等名 早稲田大学幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現
3. 学会等名 神楽坂微分幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 An optimal hyperbolic embedding for graph embedding
3. 学会等名 材料科学における幾何と代数II (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 The energy minimizing discrete harmonic maps and its application to closed surfaces
3. 学会等名 Discrete Geometric Analysis and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2021 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現
3. 学会等名 若手による幾何学研究報告会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps
3. 学会等名 The 13th MSJ-SI 2020, Differential Geometry and Integrable Systems - Mathematics of Symmetry, Stability and Moduli - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現
3. 学会等名 筑波大学幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現
3. 学会等名 日本数学会2021年度会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 ラグランジュ部分多様体と離散調和写像の微分幾何
3. 学会等名 大阪市立大学数学研究会特別賞受賞講演（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps
3. 学会等名 Geometric analysis online seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Equivariant realizations of Hermitian symmetric space of noncompact type
3. 学会等名 International Workshop on Geometric Evolution Equations and Related Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps
3. 学会等名 Mini-Workshop on Geometry of Surfaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 離散調和写像による曲面の一意化
3. 学会等名 筑波大学幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 離散調和写像による曲面の一意化
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 重み付きハミルトン安定性と変形ラグランジュ平均曲率流
3. 学会等名 二日間セミナー準備ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps
3. 学会等名 Geometry and Probability 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 離散調和写像による曲面の一意化
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 離散調和写像による曲面の一意化
3. 学会等名 離散幾何解析とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 離散調和写像による曲面の一意化
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps
3. 学会等名 The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Reductions of minimal Lagrangian submanifolds with symmetries
3. 学会等名 Workshop on the isoparametric theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 An optimal hyperbolic metric for graph embedding
3. 学会等名 Discrete and Computational Geometry and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 On Hamiltonian stable Lagrangian tori in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 The 22nd International Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Some homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 Symmetry and shape (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps,
3. 学会等名 The second Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 An isoparametric function for homogeneous hypersurface in Kahler-Einstein manifold
3. 学会等名 Hiroshima Differential Geometry Day 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Hamiltonian stability for weighted measure and generalized Lagrangian mean curvature flow
3. 学会等名 The 11th Mathematical Society of Japan (MSJ) Seasonal Institute (SI) The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 対称性を持つ極小ラグランジュ部分多様体の簡約
3. 学会等名 第65回幾何学シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 複素双曲空間内のハミルトン安定ラグランジュトーラスについて
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toru Kajigaya
2. 発表標題 Hamiltonian minimality of normal bundles over the isoparametric submanifolds
3. 学会等名 Ewha Womans University, Geometry Seminar
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 重み付きハミルトン安定性と変形ラグランジュ平均曲率流
3. 学会等名 福岡大学幾何セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 重み付きハミルトン安定性と変形ラグランジュ平均曲率流
3. 学会等名 首都大幾何セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶ヶ谷徹
2. 発表標題 複素双曲空間内のハミルトン安定ラグランジュトールスについて
3. 学会等名 日本数学会2019年度会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	橋永 貴弘 (HASHINAGA TAKAHIRO) (40772132)	佐賀大学・教育学部・准教授 (17201)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	國川 慶太 (KUNIKAWA KEITA) (10813165)	宇都宮大学・教育学部・助教 (12201)	
研究協力者	田中 亮吉 (TANAKA RYOKICHI) (80629759)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 5th International Workshop Geometry of Submanifolds and Integrable Systems	開催年 2022年～2022年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関