

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13423

研究課題名（和文）ランダム媒質中で時間発展する統計力学モデルの解析

研究課題名（英文）Analysis of statistical mechanical models evolving in random media

研究代表者

中島 誠（Nakashima, Makoto）

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：60635902

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：確率偏微分方程式（SPDE）の中でも特異なものというものがある。その中でも高次元の確率熱方程式（SHE）やKPZ方程式といったものに関する研究を行った。特異なSPDEは近似と繰り込みを合わせてその極限として解を定義されることが多い。SHEやKPZ方程式に対して近似と繰り込みを行った際に適当なスケールであっても自明な方程式に至るようなパラメータ領域が存在する。このような領域において解の摂動を考え中心極限定理のようなものが成り立つことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高次元SHEやKPZ方程式は特異確率偏微分方程式に有効な正則構造理論などは現時点では適用できていない。今回は自明な解に収束するようなパラメータ領域ではあるがそれらに対して摂動を調べることで解析を試みた点で非常に意味がある。またこのような収束が成り立つと予想される全ての領域で示せたことも完全な解決を与えたという意味で重要である。

研究成果の概要（英文）：It is known that there exist singular SPDEs. We studied high dimensional stochastic heat equations (SHE) and KPZ equations among them. For singular SPDEs, we usually define their solutions as the limit of modified SPDEs with renormalizations. In the case of SHE and KPZ eq, we can find a certain regime of parameters in which the limits are solutions of the standard heat equations. We focused on the solutions' fluctuations and proved that they converged to Gaussian random variables.

研究分野：確率論

キーワード：確率熱方程式 KPZ方程式 ランダム媒質中のディレクティドポリマー

1. 研究開始当初の背景

時間発展する統計力学模型をランダム媒質中で考える。特にランダム媒質は時間、空間に依存するものとする。物理模型は不純物の混じった溶媒中で成長する高分子などより現実の問題に即した現象を捉えることができると考えられている。このような物理模型の中で現在注目されているのはランダム媒質中のディレクティブポリマーと呼ばれるものである。これは一つには KPZ 方程式というランダム成長するような界面(浸透する水の境界や紙の燃焼など)の離散的な設定に関連すると期待されており、これに近いことは証明されている。そのほかにも様々な模型があり、それらの研究が互いに影響を与えながら発展していた。例えばランダムウォークピニング模型と呼ばれる物理模型はランダム媒質中のディレクティブポリマーの相転移の解析を行うために用いられ、特に分配関数と呼ばれる物理量が収束すればランダム媒質中のディレクティブポリマーの分配関数も一様可積分となり媒質の影響が“現れない”ことが知られている。しかし完全な特徴付を行うわけではない。

2. 研究の目的

物理現象ではある種のパラメータを変化させることで、その系の持つ性質が大きく変わることがある。例えば水の温度変化による状態変化(氷 \leftrightarrow 水 \leftrightarrow 気体)がある。このようなパラメータの変化による状態(相)の変化を相転移と呼ぶ。そのような相(マクロな視点で)の変化をミクロな視点での物理法則を用いて数学的に記述することが統計力学の一つの目標である。その値を境に相が変わるパラメータを臨界点と呼ぶ。また臨界点によって確率模型は優臨界的な相、劣臨界的な相に分類される。

この研究ではランダムな媒質中における統計力学模型の研究としてランダム媒質中のディレクティブポリマーやランダムウォークピニング模型の研究を通してこれらの臨界点の特徴付やその相における挙動の解析などを行うことで媒質内の不純物が与える影響の解析を行うことが一つの目標であった。特にランダムウォークピニング模型とランダム媒質中のディレクティブポリマーを融合したような物理模型としてランダムウォークピニングを持つランダム媒質中のディレクティブポリマーを考えるとその分配関数の(指数)発散とランダム媒質中のディレクティブポリマーの分配関数の(指数)減衰が対応していることがわかっている。今までランダム媒質中のディレクティブポリマーでは注目されていなかった模型を通して2種の相転移の臨界点の(不一致)を証明することが一つの目標であった。

またランダム媒質中のディレクティブポリマーに関連して有向パーコレーションと呼ばれる物理模型の解析を行うことで特にその臨界点近傍での典型的な浸透経路の構造を調べることも目的としていた。有向パーコレーションは穴の空いた物質に粒子を通したときに通過できるかを記述する模型であり、古くから研究されている。吉田伸生氏が有向パーコレーションの経路の数とランダム媒質中のディレクティブポリマーに同じ構造があることを明らかにしたことで、ランダム媒質中のディレクティブポリマーで培われた手法が適用できることが期待される。

3. 研究の方法

ランダム媒質中のディレクティブポリマーの臨界点の解析のためには上記の新しい物理模型の解析が必要であると判断し、その解析手法としてランダムな言語列に関する大偏差原理というものをを用いる必要があることはランダムウォークピニング模型の議論から推察されたので、同様の手法を用いることが検討された。また一方で F. Rassoul-Agha 氏、T. Seppäläinen 氏、A. Yilmaz 氏らによりランダム媒質中のディレクティブポリマーの自由エネルギーと呼ばれる物理量を変分原理で表現する方法も開発されたので、こちらの手法も有用であると期待された。これらの2通りの方法で解析を行なっていく方法が臨界点の解析の方法であった。

また有向パーコレーションの解析に関してはそれに関連する確率模型として感染模型というものが知られており、特にそのある種の極限としてスーパーブラウン運動と呼ばれる測度値確率過程が現れることが知られている。そこで有向パーコレーションの問題をスーパーブラウン運動の問題に帰着させることで解析を行うことが検討された。

4. 研究成果

ランダム媒質中のディレクティブポリマーと関連する物理模型である KPZ 方程式の高次元における解に関する研究を行なった。KPZ 方程式とは非線形項を持つような確率偏微分方程式であり、その非線形項の存在により通常の意味では解が定義できないことが知られている。しかし1997年に Bertini-Giacomin により Bergers 方程式で使われる Cole-Hopf 変換と呼ばれる手法を用いることで1次元の場合には乗法的な確率熱方程式を用いて解の意味付が可能になった。ただしこのとき KPZ 方程式にはくりこみと呼ばれる発散する項が現れる。特に近年 M. Hairer 氏の正則構造理論などの導入により特異な確率偏微分方程式とその解の意味付が盛んになされるようになった。しかし高次元の乗法的確率熱方程式や KPZ 方程式の解の意味付にはまだ至っていない。

ない。

そこで近年では高次元の場合に Bertini-Giacomin の手法の改良で乗法的確率熱方程式に繰り込みを施すことで意味付を行い、そこから KPZ 方程式の意味付を行う方針で研究がなされていた。その流れの一環で次のような研究を行なった。

1 次元の時と同様に乗法的確率熱方程式に現れるノイズを空間方向に滑らかにしたものを考える。ただしあるパラメータ β が 0 に収束する時通常ホワイトノイズに収束するように滑らかにする。このようにノイズが空間方向に滑らかになると通常的手法で解を構成することができ、特に今の場合 Feynman-Kac の公式という確率論でよく用いられる表現が可能になる。

この解を $u(x)$ と表したときに、1 次元の場合は β が 0 に収束すると $u(x)$ は乗法的確率熱方程式の解に収束し、連続関数であることが知られている。一方で 2 次元以上の場合には 0 に収束してしまい意味がない。これはノイズの影響が強いからであり、そこで繰り込み項としてノイズを弱めるような係数 ϵ を与えることを考えた。この解を改めて $u_\epsilon(x)$ と表すことにする。このようなものに対して $h_\epsilon(x) = \log u_\epsilon(x)$ とおき、テスト関数を作用させることでランダムな場として捉える。 ϵ に現れるパラメータに関してある L^2 領域と呼ばれる範囲にあるときは場が自明なものに収束することがわかり、KPZ 方程式の解の意味付としては失敗している。この問題は $u_\epsilon(x)$ に関するある種の漸近的な独立性が効いており、これらの積分(和)と捉えると大数の法則が成り立つためランダムネスが消えるという直感的な説明ができる。

この大数の法則に注目し中心極限定理が成り立つのかどうかの問題を考えた。この種の問題はほかにも行われていたが、今回 L^2 領域に関して中心極限定理が成り立つことを示すことができた。特に L^2 領域がこの中心極限定理が成り立つ限界であると予想されていたため、この結果によりこの予想の肯定的な解決が見られたことになる。

またピニング模型、ランダム媒質中のディレクティブポリマーに関連して自由エネルギーの高温度での挙動の解析を行なった。ピニング模型に関しては更新過程に関連するパラメータ β があるが、その β が $(1/2, 1)$ にあるときに自由エネルギーのスケール極限を与え、1 次元ランダム媒質中のディレクティブポリマーの自由エネルギーのスケール極限を求めた。これらの極限はピニング模型およびランダム媒質中のディレクティブポリマーの連続極限の存在が知られており、そこに帰着させる手法を用いた。自由エネルギーのスケール極限の存在は既存の結果として知られていたが分配関数の負のモーメントの有界性を認めるためにランダム媒質にある仮定が置かれていた。そのような仮定を外したものが今回の結果であり、これにより自由エネルギーのスケール極限が任意の媒質に対して成り立つことが示された。

分配関数の負のモーメントの有界性をさけるために、coarse graining と呼ばれる統計力学模型においてしばしば用いられるものを使った。これは有向グラフに対して十分大きい時空間ボックスを考え、これらを再び時空間と捉える。これらのボックスにおいて分配関数がある条件を満たす確率を考え、この確率が 1 に近づけば有向グラフにおける有効パーコレーションが正の確率で浸透することがわかる。この帰結として自由エネルギーを下からの評価ができた。

また乗法的確率熱方程式と関連して 1 点(原点)と相互作用をもつシュレディンガー作用素を考えた。シュレディンガー作用素に対応する半群として Feynman-Kac の公式があり、ブラウン運動を用いて記述される。単純に 1 点で相互作用するというのを考えると 2 次元以上ではブラウン運動は 1 点にぶつかることはないので 1 点相互作用は通常の意味では定義できないことがわかる。しかしこの 1 点相互作用はラブラシアン自己共役拡大の近似として成り立つことが知られている。そこでこの観点から 1 点相互作用をもつシュレディンガー作用素とそれに対応する Feynman-Kac の公式の列を考えた。その解析にはピニング模型の議論を用いた。その結果 Feynman-Kac の公式に現れる確率過程はブラウン運動とは特異になり確率正で原点に無限回ぶつかるようなものになることが示された。その証明手法の鍵はピニング模型の更新過程の更新時間の集合の極限が subordinator の値域に一致することを証明することであった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Clement Cosco, Shuta Nakajima Makoto Nakashima	4. 巻 151
2. 論文標題 Law of large numbers and fluctuations in the sub-critical and L^2 regions for SHE and KPZ equation in dimension $d \geq 3$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 127-173
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.spa.2022.05.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shuta Nakajima, Makoto Nakashima	4. 巻 28
2. 論文標題 Fluctuations of two-dimensional stochastic heat equation and KPZ equation in subcritical regime for general initial conditions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1-38
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/22-EJP885	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ryoki Fukushima, Nobuo Yoshida, Makoto Nakashima	4. 巻 -
2. 論文標題 The period group of a characteristic function	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Real Analysis Exchange	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Makoto Nakashima	4. 巻 24
2. 論文標題 Free energy of directed polymer in random environment in $1+1$ -dimension at high temperature	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/19-EJP292	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

[学会発表] 計17件(うち招待講演 15件/うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Gaussian fluctuations of stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension in L22-regime
3. 学会等名 42nd conference on Stochastic Processes and their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 A remark of the free energy for some disordered systems
3. 学会等名 Probability and Analysis on Random Structures and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 A remark of the free energy for disordered pinning model and directed polymers in random environment
3. 学会等名 Open Japanese-German conference on stochastic analysis and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中島誠
2. 発表標題 ランダム媒質中のピンニング模型およびディレクティドポリマーの自由エネルギーに関する補足
3. 学会等名 The 20th Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中島誠
2. 発表標題 高分子模型の臨界点近傍での挙動および 1 点と相互作用をもつ Schrodinger 方程式
3. 学会等名 京都大学理学研究科数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Feynman-Kac formula associated with Schrodinger operator with one point interaction
3. 学会等名 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Gaussian fluctuations of stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension in subcritical regime.
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Fluctuation in L2-region for stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension.
3. 学会等名 関西確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 高次元確率熱方程式とKPZ 方程式のL2-領域における解の摂動
3. 学会等名 大規模相互作用系の確率解析 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Gaussian fluctuations of stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension in L2 regime
3. 学会等名 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields, (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 高次元確率熱方程式と KPZ 方程式のL ² -領域における摂動
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Fluctuation in L ² -region for stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Free energy of directed polymers in random environment
3. 学会等名 The First China-Japan-Korea Probability Worksho® (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Random pinning model related to directed polymers in random environment
3. 学会等名 Japan-Netherlands Workshop: Probabilistic Methods of Statistical Mechanics of Random Media (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Free energy of directed polymers in random environment in 1+1 dimension
3. 学会等名 Workshop on “ Stochastic partial differential equations and related topics ” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Free energy of directed polymers in random environment
3. 学会等名 Gaussian Free Fields and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Makoto Nakashima
2. 発表標題 Free energy of directed polymers in random environment
3. 学会等名 Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------