

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13426

研究課題名（和文）非平衡定常状態に対する極限定理

研究課題名（英文）Limit theorems for stationary nonequilibrium states

研究代表者

角田 謙吉 (Tsunoda, Kenkichi)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：10783938

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：格子気体に対するスケール極限について研究を行った。特に、流体力学極限と大偏差原理に関連する問題について研究を行い、遅い境界を持つ排他過程の定常状態に対する大数の法則、平均曲率流のGlauber-Kawasaki過程からの導出、Burgers方程式の弱非対称排他過程からの導出、Glauber-Kawasaki過程が混合時間について相転移を起こすことなどの成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体力学極限は確率論のみならず数理物理学や統計力学などで古典的に研究されており、現在も活発に研究が行われている研究対象である。標語的に「ミクロからマクロへ」とよばれる、統計力学の理念を数学的に厳密に考える問題であるが、考えられる問題はいずれも容易なものではなく、その問題の解決には数学的に深い知見が必要とされる。そのような問題に対して新たな研究成果を与えることは学術的に新たな展開を与えることになると考えられ、研究分野の進展に貢献を与えるものとみこまれる。

研究成果の概要（英文）：I studied a scaling limit for a lattice gas. Especially, I studied a hydrodynamic limit and problems related to a large deviation principle. I obtained results on law of large numbers for a stationary state of an exclusion process with slow boundary, derivation of the mean curvature flow from a Glauber-Kawasaki dynamics, derivation of the Burgers equation from a weakly asymmetric exclusion process and phase transition in mixing times for a Glauber-Kawasaki dynamics.

研究分野：確率論

キーワード：流体力学極限 大偏差原理 格子気体 大数の法則 平均曲率流 Burgers方程式 混合時間 非平衡定常状態

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式により記述される巨視的な系を粒子系等の微視的な系から研究することは、歴史的に古典的な問題でありかつ現在においても重要な問題として、様々な分野において考えられているがその数学的解析は容易ではない。例えばハミルトン力学に従う粒子系から出発して、熱方程式等の偏微分方程式を数学的に導出することは非常に難しい問題である。そこで確率的に運動する相互作用粒子系から出発し、時空間に関するスケール極限を考えることにより、偏微分方程式を導出するという手法がこれまで数多く研究されて来た。そのような手法及びスケール極限は標語的に流体力学極限と呼ばれる。流体力学極限は1980年代を中心に様々な数学者及び物理学者により研究されたが、現在においても多くの研究者の興味の対象となっている。実際流体力学極限の理論の発展により、現在では物理学のみならず生物学や社会数学等で現れる様々な巨視的な支配方程式を微視的な確率模型より解析することが可能である。

流体力学極限による手法は巨視的な方程式を導出するのみでなく、微視的な系と巨視的な系を繋ぐスケール極限としてそれらの関係を記述することが出来るという特徴も持つ。実際、流体力学極限は確率論の枠組みの中で大数の法則として定式化され、付随する大偏差原理や中心極限定理等の極限定理を示すことにより微視的な系の詳細な情報が得られる。考えられる微視的な系は粒子系や界面模型等様々な確率模型が考えられるが、本研究では格子気体と呼ばれる粒子系を取り扱う。格子気体は確率模型として単純なものであるが、相互作用系としての本質を失っておらず、流体力学極限に関する問題を考える上で最も基本的な研究対象である。例えば、Bertiniらは格子気体に対する大偏差原理を用いることにより、非平衡定常状態の解析を行ったが、その手法は非常に広範なものであり様々な確率模型へと適用可能である。ここで非平衡定常状態とは、端点で異なる温度を持った(1次元的な)棒が、時間無限大で到達する状態が一つの例である。本研究の根本的な問いは「非平衡定常状態に対する極限定理を示すために必要な本質的数学は何か」ということである。

2. 研究の目的

格子気体は数学的にはマルコフ過程として定義される。このマルコフ過程は時間発展に関して不変な分布を持つことが知られており、その分布は定常状態と呼ばれる。この定常状態が格子気体における非平衡定常状態の数学的模型である。非平衡定常状態の流体力学極限による解析は、Bertiniらにより近年活発に研究されているが、数学的に厳密な解析はディリクレ境界条件の場合のみに対して行われている。格子気体と呼ばれる粒子系の中で、その相互作用が最も単純な場合は単純排他過程と呼ばれる。先の棒の例に対応する粒子系として、1次元区間上の境界で粒子の流出・流入を伴う単純排他過程が挙げられ、巨視的な偏微分方程式としてはディリクレ境界条件付きの線形熱方程式に対応している。単純排他過程は線形な系(対応する偏微分方程式が線形)であるが、一般的な格子気体に対応する偏微分方程式は非線形熱方程式となるので、その解析は容易ではない。

近年境界における粒子の流出・流入のレートを変更することにより、巨視的な偏微分方程式がノイマン境界条件やロビン境界条件付きの線形熱方程式に対応することが、Baldassoらにより示された。Baldassoらによる先行研究では流体力学極限が研究されている。先行研究の問題点は系が線形であることと、空間1次元に限定していることである。実際、彼らの手法は粒子系が線形であることや空間が1次元であることに強く依存している。本研究の目的は、「既存の先行研究結果を空間の次元に依らない非線形な系に拡張することであり、それを通じて様々な確率模型に適用可能な解析手法を構築すること」である。

既存の幾つかの先行研究では考えている系が線形であることから、対応する偏微分方程式の解析や種々の量に対する評価が容易である。しかしながら非線形系を対象とする本研究では、研究課題解決のために現れる幾つかの困難を偏微分方程式論や関数解析学の手法や結果を組み合わせる必要がある。線形な系に対する結果を非線形な系に拡張するという点は新規性が高い点である。また今まではディリクレ境界条件のみに対して行われていた非平衡定常状態の解析を、本研究の枠組みで行うことによりノイマン境界条件やロビン境界条件まで広げた一般の場合についても、統一的に解析を行うことが出来る。このことにより背後に潜む数学や、非平衡定常状態を持つ物理的な性質について更に理解することが可能であると考えられる。

3. 研究の方法

研究期間内に行った研究について具体的な研究の方法をそれぞれ述べる。

(1) 遅い境界を持つ排他過程の定常状態に対する大数の法則

遅い境界を持つ排他過程の定常状態に対して大数の法則を示す方法について述べる。この粒子系の巨視的な粒子数密度の時間発展は境界条件付きの熱方程式で記述されることが知られている。境界条件は粒子が境界で流入・流出する強さに応じてディリクレ境界条件、ロビン境界条件、ノイマン境界条件に分類される。以前行った研究の手法を用いると、ディリクレ境界条件とロビン境界条件の場合に定常状態に対する大数の法則が成立することが示される。ノイマン境界条件の場合にはその手法をそのまま適用することは出来ないため、その手法を一般化する

る必要がある。そのためには熱方程式を導出するために適切な時間スケールである拡散スケールよりも長い時間スケールを解析することが重要な役割を果たす。より長い時間スケールを解析することにより、粒子数密度の平均が時間発展する時間スケールを特定し、それにより粒子数密度の平均が平衡化する描像を特定することが可能である。これらの事実と以前培った手法を組み合わせることがこの問題を解決するのに有用な方法である。この問題の中で得られた手法は類似の問題を解決するのに有用である。実際他の研究者による研究においても本問題を解決するために用いられた手法が有用であることが確認されている。

(2) 平均曲率流の Glauber-Kawasaki 過程からの導出

Glauber-Kawasaki 過程から平均曲率流を導出するが可能であることは先行研究により知られていたが、その手法は限られた問題にしか適用できない幾分限定的なものであった。近年 Jara-Menezes によりエントロピー不等式を示す新たな手法が開発され、その手法は平均曲率流の導出にも役に立つものであった。Jara-Menezes の手法をこの模型の場合に適用し、この問題を解決する上で必要な離散化された偏微分方程式を解析することにより、先行研究よりも適用範囲が広い形でこの問題を研究することが可能であることを明らかにした。また Boltzmann-Gibbs 原理とよばれるある種の局所エルゴード定理を示すことにより、更なる一般化可能であることも明らかにした。

(3) Burgers 方程式の弱非対称排他過程からの導出

相互作用粒子系から流体を記述する Burgers 方程式や Navier-Stokes 方程式を導出することは古典的に研究されており、現在においても重要な問題として多くの問題が考えられている。先行研究では中間視的なサイズのジャンプを持つ排他過程から Burgers 方程式が導出されていた。先で述べた Jara-Menezes の手法を発展させることにより中間視的なサイズのジャンプを持たない場合、つまり微視的なサイズのジャンプしか持たない場合についても Burgers 方程式が導出できることを明らかにした。その鍵は先と同様にエントロピー不等式の改善であり、Burgers 方程式を導出するための非圧縮極限の構造を特定することが必要である。そのためにはエントロピー不等式を改善する上で現れる離散化された Burgers 方程式を適切なオーダーまで展開することが必要であり、それを通して必要なエントロピー不等式を得ることができる。

(4) Glauber-Kawasaki 過程に対する混合時間についての相転移

Glauber-Kawasaki 過程に対する大偏差原理から、Glauber-Kawasaki 過程は特定の飛躍率の場合に相転移現象を示すことがわかる。この相転移現象をマルコフ過程の混合時間と呼ばれる量を用いて述べることを明らかにした。温度が高温の場合と低温の場合ではそれぞれの研究手法が大きく異なるので、それぞれについて述べる。低温の場合には無限次元空間における大偏差原理を用いて脱出問題を展開することが主要なアイデアである。粒子数密度が準安定状態へと移行するためには準ポテンシャルにより記述されるポテンシャル障壁を飛び越える必要があることが自然に予想されるので、その解析を行う。動的な大偏差原理を用いて準安定状態の近傍での脱出問題を展開することにより、混合時間が指数的に長いことがわかる。また高温の場合には流体力学極限の方程式を解析することにより混合時間は高々対数的なオーダーであることが、系の温度が十分高温である場合にはわかる。温度が臨界温度より大きい場合に示すには、更なる解析が必要である。そのような状況も扱うためには、拡散スケールよりも長い時間スケールで局所エルゴード定理を示す必要がある。そのためには局所的な時間スケールで Glauber 力学を無視できることや、独立なランダムウォークと排他過程のカップリングを構成する必要がある。その上でマルコフ過程の混合時間を解析する一般論やランダムウォークに対する幾つかの結果を援用することがこの問題を解決するための方法である。

4. 研究成果

前述の研究の方法でも述べたように、格子気体に対する粒子系密度に対して様々なスケール極限を得ることができた。またそれらの問題を解決するための手法を与えることができた。以下具体的に得られた研究成果を述べる。(1) 遅い境界を持つ排他過程の定常状態がディリクレ境界条件・ロビン境界条件・ノイマン境界条件をもつラプラス方程式の解に収束することを示して、その一般的な解析手法を明らかにした。(2) Glauber-Kawasaki 過程に対して新たなエントロピー不等式を示すことにより、平均曲率流がスケール極限に現れることの別証明を与えた。またこの証明を発展させることにより、既存の研究では扱えない場合についても取り扱うことができることを示し、勾配型の排他過程に対しても同じ結果を得ることができた。(3) 弱非対称排他過程に対して非圧縮極限を考えることにより、Burgers 方程式を導出した。これは既存の研究で得られていなかった新たな結果である。(4) Glauber-Kawasaki 過程が混合時間について相転移を起こすことを明らかにした。より詳しく、系が低温の場合には混合時間は指数的に長くなる必要があることと、系が高温の場合には混合時間は高々対数的なオーダーであることを示した。また本研究課題と直接的な繋がりはないが、本研究課題を解決するために習得した手法を基礎として、ランダムトポロジーについての成果も得ることができた。具体的にはランダム方体複体のベッチ数に対する大数の法則・中心極限定理や、多様体上の二頂点過程のチェック複体のベッチ数に対する大数の法則などの成果を得ることができた。以上の研究成果は既に論文としてまとめられ、いずれも査読付きの国際専門誌に掲載されている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tsunoda Kenkichi	4. 巻 19
2. 論文標題 Exponentially slow mixing and hitting times of rare events for a reaction-diffusion model	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics	6. 最初と最後の頁 1161 ~ 1184
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.30757/ALEA.v19-48	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Ryokichi、Tsunoda Kenkichi	4. 巻 27
2. 論文標題 Glauber-Exclusion dynamics: rapid mixing regime	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1 ~ 26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/22-EJP865	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Funaki Tadahisa、van Meurs Patrick、Sethuraman Sunder、Tsunoda Kenkichi	4. 巻 190
2. 論文標題 Motion by Mean Curvature from Glauber-Kawasaki Dynamics with Speed Change	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-022-03044-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jara M.、Landim C.、Tsunoda K.	4. 巻 57
2. 論文標題 Derivation of viscous Burgers equations from weakly asymmetric exclusion processes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilité et Statistiques	6. 最初と最後の頁 169-194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/20-AIHP1075	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Funaki, T., Tsunoda, K.	4. 巻 177
2. 論文標題 Motion by Mean Curvature from Glauber-Kawasaki Dynamics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 183-208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-019-02364-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiraoka Yasuaki, Tsunoda Kenkichi	4. 巻 60
2. 論文標題 Limit Theorems for Random Cubical Homology	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 665 ~ 687
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-018-0007-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Goel Akshay, Trinh Khanh Duy, Tsunoda Kenkichi	4. 巻 174
2. 論文標題 Strong Law of Large Numbers for Betti Numbers in the Thermodynamic Regime	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 865 ~ 892
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-018-2201-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Tsunoda	4. 巻 B79
2. 論文標題 Hydrostatic limit for exclusion process with slow boundary revisited	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 149-162
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計27件(うち招待講演 15件/うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Mixing time for a reaction-diffusion model
3. 学会等名 Ninth Bielefeld-SNU Joint Workshop in Mathematics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Occupation time large deviations for one-dimensional zero-range process
3. 学会等名 Conference in Honor of S.R.S. Varadhan's 80th Birthday (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Large deviations and mixing times for a reaction-diffusion model
3. 学会等名 Seminario de Probabilidade e Mecanica Estaistica (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 1次元零距离過程の占有時間に対する大偏差原理
3. 学会等名 九州確率論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Occupation time large deviations for one-dimensional zero-range process
3. 学会等名 関西確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Large deviation principle for persistence diagrams of random cubical filtrations
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Large deviations for random cubical filtrations
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XVII, 奈良女子大学
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 角田謙吉
2. 発表標題 反応拡散模型に対する混合時間
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Glauber+Kawasaki processに対するスケール極限
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XVI
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Exponentially slow mixing for a reaction-diffusion model
3. 学会等名 大規模相互作用系の確率解析 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Hitting times of rare events for a reaction-diffusion model
3. 学会等名 2021年度確率論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Mixing time phase transition for a reaction-diffusion model
3. 学会等名 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Glauber+Kawasaki dynamics and reaction-diffusion equation
3. 学会等名 金沢解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Glauber-Kawasaki過程からの平均曲率流の導出
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Scaling limits for Glauber-Kawasaki processes
3. 学会等名 Workshop on probabilistic methods in statistical mechanics of random media and random fields（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Glauber-Kawasaki過程からの平均曲率流の導出
3. 学会等名 京都大学関西確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Derivation of viscous Burgers equations from weakly asymmetric exclusion processes
3. 学会等名 Stochastic analysis, random fields and integrable probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Scaling limit for exclusion parocesses
3. 学会等名 確率論ヤングサマーセミナー2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Incompressible limit for weakly asymmetric simple exclusion processes
3. 学会等名 Japanese-German open conference on stochastic analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 排他過程に対するスケール極限
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenkichi TSUNODA
2. 発表標題 Incompressible limit for the weakly asymmetric simple exclusion process
3. 学会等名 Rigorous statistical mechanics and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Local replacement lemma for one-dimensional zero range
3. 学会等名 Hydrodynamic limit and related topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 準安定性と局所平衡
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XV
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 粒子系に対する特異極限
3. 学会等名 確率論サマースクール2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenkichi Tsunoda
2. 発表標題 Incompressible limit for the WASEP
3. 学会等名 17th Stochastic analysis on large scale interacting systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 1次元相互作用粒子系の占有時間に対する大偏差原理
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XIV
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 角田 謙吉
2. 発表標題 Scaling limits for Glauber-Kawasaki processes
3. 学会等名 日本数学会2019年度数学会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者のwebページ https://www3.math.kyushu-u.ac.jp/~tsunoda/index.html</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ブラジル	Instituto de Matematica Pura e Aplicada			