

様 式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書



令和 4 年 5 月 15 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13429

研究課題名(和文) 確率過程に由来する強い相関を持つランダム場の研究

研究課題名(英文) Research on strongly correlated random fields related to stochastic processes

研究代表者

阿部 圭宏 (Abe, Yoshihiro)

千葉大学・大学院理学研究院・講師

研究者番号：50814109

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000 円

研究成果の概要(和文)：2次元格子上的単純ランダムウォーク(SRW)の局所時間の統計的性質を調べた。局所時間とはSRWが各点に滞在する累積時間である。特に局所時間が最大値に近い値をとる点(thick point)、最小値に近い値をとる点(thin point)、定数値をとる点(light point)、ゼロの点(late point)の統計を解析した。これらの点の統計は2次元量子重力測度と呼ばれるランダム測度により特徴づけられることをMarek Biskup氏(UCLA)、Sangchul Lee氏(USC)の共同研究により示した。本研究に関する論文を2本執筆し、学術誌に投稿した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Thick pointやavoided pointの研究はErdos-Taylor (1960)、Aldous (1989)まで遡り、いくつかの問題提起がなされた。その後、Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni (2001、2006)が問題を解決した。同時に、新たな問題提起をして、現在も未解決な問題は多い。本研究はthick pointやlate pointが2次元量子重力測度と密接に関連していることを明らかにし、これらの問題に新たな知見を与えた。これにより、今後Dembo氏らが提起した問題解決に向けた研究のより一層の進展が期待される。

研究成果の概要(英文)：I studied statistical properties of local times for the simple random walk (SRW) on the two-dimensional lattice. Local times are total accumulated times SRW spends on vertices. I especially focused on thick points (points whose local times are close to the maximum), thin points (points whose local times are close to the minimum), light points (points whose local times are of order one), late point (point whose local times are zero). As joint works with Marek Biskup (UCLA) and Sangchul Lee (USC), we proved that statistics of these points are characterized by random measures called Liouville quantum gravity measure. We wrote two papers and submit them to journals.

研究分野：確率論

キーワード：被覆時間 離散ガウス自由場 thick point late point random interlacement 局所時間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

#### 1. 研究開始当初の背景

格子上の単純ランダムウォークは粒子のランダムなふるまいを記述する基本的なモデルである。単純ランダムウォークが「訪問しにくい」点 (late point) の集合および「頻繁に訪問する」点 (thick point) の集合の研究の歴史は長く、前者は Erdos-Taylor (1960)、後者は Aldous (1989) まで遡る。これらの論文・本で提起された問題は Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni (2001、2006) により解決された。その研究や Belius (2013)、Miller-Sousi (2017) の研究などにより、2 次元の場合と 3 次元以上の場合で late point と thick point の幾何的性質は大きく異なることがわかっていく。3 次元以上の場合、late point と thick point は独立な点配置 (ポアソン点過程) をしていることが知られている。一方、2 次元の場合、late point と thick point は各点に他の late point/thick point が密集している (クラスターを形成する) ことが知られている。Late point と thick point のより詳細な幾何的特徴づけを与えることは当該分野の解決すべき大きな課題の一つである。Late point と thick point は広い視点で見ると、強い相関をもつランダム場とみなせる。特に、2 次元の late point と thick point は対数相関をもつランダム場と呼ばれるものに分類され、3 次元以上の late point と thick point は多項式相関をもつランダム場と呼ばれるものに分類される。多項式相関をもつランダム場は独立なランダム場と類似する性質をもつだろうと予想されている。一方、対数相関をもつランダム場は独立なランダム場とは異なるふるまいをすることが予想されている。これらの予想は界面の確率モデルである離散ガウス自由場で詳細に調べられている (Chiarini-Cipriani-Hazra (2015)、Biskup-Louidor (2018))。特に、2 次元の離散ガウス自由場の極大点 (high point) の統計はガウス乗法カオスと呼ばれるランダム測度によって特徴づけられることが知られている (Biskup-Louidor (2018))。Late point と thick point は high point と密接に関係することが知られている (Eisenbaum-Kaspi-Marcus-Rosen-Shi (2000) や Ding-Lee-Peres (2012) の研究がもととなっている)。このことから特に 2 次元の late point と thick point は 2 次元の high point と同様にガウス乗法カオスと関係することが期待される。

#### 2. 研究の目的

本研究では単純ランダムウォークに由来する強い相関をもつランダム場の諸性質を解析する。ランダム場としては主に late point と thick point を対象とする。対数相関をもつランダム場の極値統計は普遍的な漸近挙動をもつであろうと予想されている。2 次元格子上やグラフ木上の late point と thick point (これらは対数相関をもつ) がそのような漸近挙動を示すかどうかを調べる。多項式相関をもつランダム場は独立なランダム場と共通する性質をもつだろうと信じられている。3 次元以上の格子上の late point と thick point (これらは多項式相関をもつ) に対して独立なランダム場に類似する性質を見つけるとともに、独立なランダム場とは異なる性質があるのかも調べる。

#### 3. 研究の方法

Late point と thick point は離散ガウス自由場の high point と密接に関係しているため、high point に関する先行研究の手法を参考にする。一方で、ガウス自由場はガウス分布に従うことや領域マルコフ性と呼ばれるある種の独立性をもつため、比較的解析しやすいが、late point と thick point はそのようなよい性質をもたないため、解析手法の工夫が必要である。Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni (2006) や Belius-Kisler (2017) により、late point と thick point をベッセル過程と結び付けて解析する方法や単純ランダムウォークのマルコフ性を利用してある種の独立性を得る方法が提案されているので、その手法を検討し、本研究に援用する。

#### 4. 研究成果

(1) 性質のよい二次元有界領域の離散近似を考え、その上で連続時間単純ランダムウォークを走らせる。ただし、単純ランダムウォークは境界に到達したら境界上の一様分布で再出発する。また、単純ランダムウォークを走らせる時間は被覆時間の定数倍とする。この単純ランダムウォークに対して thick point や late point などの統計を解析した。これらの点の統計はいずれも 2 次元量子重力測度 (ガウス乗法カオスの一種) という、2 次元領域上のランダム測度により特徴づけられることを Marek Biskup 氏 (UCLA) との共同研究により明らかにした。本研究に関する論文を執筆し、学術誌に投稿した。この 2 次元量子重力測度は、例えば Biskup-Louidor (2018) に

より 2 次元離散ガウス自由場の極大値統計を特徴づけるものとして知られており、様々な 2 次元離散モデルの極大値統計を特徴づけるような普遍的なものだろうと信じられている。本研究では late point や thick point などの統計に対してその予想を肯定的に解決した。本研究では、thick point と late point の周辺の統計も調べた。Thick point の周辺の統計は原点でピン止めされたガウス場とポテンシャル核と呼ばれる離散調和関数の和で特徴づけられることを明らかにした。なお、2 次元離散ガウス自由場の極大値をとる点の周辺も同様な統計を持つことは Biskup-Louidor(2018)により知られていた。一方、late point の周辺の統計は Comets-Popov-Vachkovskaia (2016)により導入された 2 次元 random interlacement と呼ばれる、2 次元格子上の 1 点を避ける単純ランダムウォークパスの集まりの局所時間により特徴づけられることを明らかにした。2 次元離散トーラス(周期境界条件をもつ 2 次元格子)の late point と thick point の詳細を調べることは当該研究分野の大きな研究課題であるが、この課題に対して本研究手法が有効だろうと期待される。

(2) 2 次元格子上の離散時間単純ランダムウォークの thick point や late point などの統計的性質を調べ、それらが 2 次元量子重力測度で特徴づけられることを Marek Biskup 氏(UCLA)と Sangchul Lee 氏(University of Southern California)との共同研究で示した。本研究に関する論文を執筆し、学術誌に投稿した。(1)の研究との違いは連続時間か離散時間かの違いであり、両者の結果に多少の差異が出ることがわかった。この違いは、単純ランダムウォークを走らせる時間や各点での待ち時間がランダムか非ランダムかという違いに由来するものである。離散時間の場合は直接、離散ガウス自由場と結びつける関係式を使えないため、数多くの非自明な近似評価が必要であった。

(3) 2 次元離散トーラス上の単純ランダムウォークが初めてすべての点を訪問し尽くすまでの時間を被覆時間と呼ぶ。Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni (2004)は被覆時間の第 1 次項を特定した。被覆時間の第 2 次オーダーは Ding(2012)が調べたが、第 2 次項の係数はわかっていなかった。本研究では第 2 次項の係数を特定することで Ding 氏の結果を精密化した。証明では本研究のブラウン運動版にあたる Belius-Kistler(2017)の研究手法を援用したが、離散特有の様々な非自明な近似評価が必要であった。2 次元の被覆時間の研究は対数相関をもつランダム場の研究に分類さる。対数相関をもつランダム場ではその最大値分布はランダムにシフトされた Gumbel 分布に収束するだろうと予想されている。本研究は 2 次元の被覆時間に対してその予想を解決するための第一歩になると期待される。この研究は本研究課題の期間以前に学術誌に投稿し、期間中に改訂し、学術誌に掲載された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshihiro Abe	4. 巻 34
2. 論文標題 Second-Order Term of Cover Time for Planar Simple Random Walk	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 1689--1747
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10959-020-01011-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 10件／うち国際学会 6件）

1. 発表者名 阿部 圭宏
2. 発表標題 2次元単純ランダムウォークのthick point
3. 学会等名 The 19th Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting System（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihiro Abe
2. 発表標題 Second-order term of cover time for planar simple random walk
3. 学会等名 Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields 2022（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 阿部 圭宏
2. 発表標題 ランダムウォークの被覆問題
3. 学会等名 2020年度日本数学会秋季総合分科会特別講演(統計数学科会)（招待講演）
4. 発表年 2020年

1 . 発表者名 Yoshihiro Abe
2 . 発表標題 Exceptional points of two-dimensional random walks at multiples of the cover time
3 . 学会等名 Kobe Workshop on Probabilistic Potential Theory and Related Fields (招待講演) (国際学会)
4 . 発表年 2019年

1 . 発表者名 Yoshihiro Abe
2 . 発表標題 Exceptional points of two-dimensional random walks at multiples of the cover time
3 . 学会等名 Workshop on probabilistic methods in statistical mechanics of random media and random fields (招待講演) (国際学会)
4 . 発表年 2019年

1 . 発表者名 Yoshihiro Abe
2 . 発表標題 Exceptional points of two-dimensional random walks at multiples of the cover time
3 . 学会等名 Stochastic Processes and their Applications 2019, Invited Session : Gaussian free field and related topics (招待講演) (国際学会)
4 . 発表年 2019年

1 . 発表者名 Yoshihiro Abe
2 . 発表標題 Exceptional points of two-dimensional random walks at multiples of the cover time
3 . 学会等名 Stochastic analysis, random fields and integrable probability (招待講演) (国際学会)
4 . 発表年 2019年

1. 発表者名 阿部 圭宏
2. 発表標題 被覆時間に関する最近の研究動向
3. 学会等名 確率論早春セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshihiro Abe
2. 発表標題 Thick points for simple random walk on two-dimensional lattice
3. 学会等名 Gaussian Free Fields and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 阿部 圭宏
2. 発表標題 2次元離散ガウス自由場の極大値
3. 学会等名 2018年度確率論サマースクール（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of California Los Angeles	University of Southern California		