

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：34304

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2023

課題番号：18K13431

研究課題名（和文）複素解析に基づいたラフパス理論の研究

研究課題名（英文）Rough Path Theory via Complex Analysis

研究代表者

伊藤 悠 (Ito, Yu)

京都産業大学・理学部・准教授

研究者番号：70779214

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では、非整数階微積分および複素解析に基づいたラフパス理論の研究に取り組み、ラフ積分と呼ばれるラフパス理論における線積分に関して体系的な研究成果を得ている。ラフ積分はラフパスで駆動される微分方程式の理論においても重要な役割を果たすことが知られている。本研究はラフパス理論における線積分や微分方程式に対してより簡明な取り扱いを実現し、ラフパス理論を用いた確率解析の研究に新たな方法を提供することが期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の特色は、ラフ積分と呼ばれるラフパス理論における線積分概念にある。通常のラフ積分の定義は補正されたリーマン-スティルチェス和の極限として与えられる。その一方、本研究のラフ積分の定義は補正された非整数階微分作用素を用いてルベグ積分として明示的に与えられ、通常のラフ積分と比べて簡明な取り扱いを実現する。ラフパスで駆動される微分方程式の理論においてもラフ積分は重要であり、本研究はラフパス理論における線積分や微分方程式に対してより簡明な取り扱いを実現し、ラフパス理論を用いた確率解析の研究に新たな方法を提供することが期待される。

研究成果の概要（英文）：Using fractional calculus and complex analysis, we study an alternative approach to the fundamental theory of rough path analysis, and obtain some results on integrals along rough paths, called rough integrals. It is known that rough integrals play an important role in the fundamental theory of rough path analysis, e.g., the theory of differential equations driven by rough paths. We expect our results to provide more direct ways to the fundamental theory of rough path analysis and the applications to stochastic analysis.

研究分野：確率解析

キーワード：ラフパス理論 複素解析 非整数階微積分

1. 研究開始当初の背景

ラフパス理論は T.J.Lyons(1998)により創始された、滑らかさの度合いの小さな関数に関する微積分学の理論であり、確率解析の研究に有用である。その一方で、ラフパス理論を用いた確率解析の研究には技術的な制約条件が課されることが多い。また、ラフパス理論は L.C.Young (1936)による積分論を発展させた方法に基づくが、Lyons(1998)による従来の方法とは異なる新たな方法に基づいたラフパス理論が、M.Gubinelli(2004)、A.M.Davie(2008)、Y.Hu-D.Nualart(2009)などにより提案されている。

2. 研究の目的

ラフパス理論は確率解析の研究に有用であるが、従前から認識されている技術的な問題も多くある。そのような問題の解決策は、Lyons(1998)による従来の方法とは異なる新たな方法に基づいたラフパス理論の基礎理論の展開であると報告者は考えている。本研究では、ラフパス理論の基礎理論をより簡明で適用範囲の広い形に整理することを目的とし、前述の新たな方法として、非整数階微積分および複素解析に基づいた方法に取り組んでいる。

3. 研究の方法

本研究の特色は、ラフ積分と呼ばれるラフパス理論における線積分概念にある。通常のラフ積分の定義は補正されたリーマン-スティルチェス積の極限として与えられる。その一方、本研究のラフ積分の定義は補正された非整数階微分作用素を用いてルベグ積分として明示的に与えられ、通常のラフ積分と比べて簡明な取り扱いを実現する。ラフ微分方程式と呼ばれるラフパスで駆動される微分方程式の理論においてもラフ積分は重要であり、本研究はラフパス理論における線積分や微分方程式に対してより簡明な取り扱いを実現し、ラフパス理論を用いた確率解析の研究に新たな方法を提供することが期待される。

4. 研究成果

本研究では、非整数階微積分および複素解析の視点からラフパス理論の研究に取り組み、ラフ積分に関して体系的な研究成果を得ている(以下の(1)-(4))。非整数階微積分に基づいたラフパス理論の研究は Hu-Nualart(2009)により提案された。Hu-Nualart(2009)はラフパスのヘルダー指数が $1/3$ 以上の場合に、ラフ積分の明示式を導出し、ラフ微分方程式の定式化を行った。前述のように、Hu-Nualart(2009)のラフ積分は補正された非整数階微分作用素を用いてルベグ積分として明示的に与えられる。

以下の(1)、(2)では Hu-Nualart(2009)のラフ積分の拡張に成功した。

- (1) Lyons(1998)のラフ積分の第1レベルについて、ラフ積分の被積分関数を被制御パスに拡張し、ラフパスのヘルダー指数が任意の場合に前述の明示式を導出した。これまでの証明を改良し、付加的な条件を取り除くことにも成功した。(雑誌論文 Tohoku Math.J.72(2020))
- (2) Lyons(1998)のラフ積分の第2レベル、第3レベルについて、Gubinelli(2004)による被制御パスに関するラフ積分をラフパスのヘルダー指数が $1/4$ 以上の場合に拡張し、前述の明示式を導出した。この研究成果は非整数ブラウン運動に関する確率解析の研究において特に有用である。(雑誌論文 Collect.Math.73(2021))

以下の(3)、(4)では Hu-Nualart(2009)のラフ積分の基本性質を明らかにした。

- (3) ラフ積分の後ろ向き表現について、前述の明示式の導出に成功した。リーマン-スティルチェス積分については、M.Zaehle(1998)が前向き積分と後ろ向き積分の明示式を導出したが、それをラフ積分に拡張した結果になっている。ラフ積分の明示式では、左側と右側の非整数階微分作用素が用いられるが、それらを入れ替えたような式として前向き積分と後ろ向き積分が結び付き、ラフ積分の後ろ向き表現が導出される点が興味深い。(雑誌論文 Kyushu

J.Math.77(2023))

- (4) ラフ積分の積分区間の加法性について、通常のラフ積分を経由しないより直接的な証明を得ることに成功した。証明に用いた議論はこれまでよりも簡明であるとともに、積分区間の加法性が成立するための条件を緩める可能性があり、ラフ微分方程式の研究においても重要な結果であると考えている。(雑誌論文 Stoch.Dyn.24(2024))

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ito Yu	4. 巻 24
2. 論文標題 A proof of the additivity of rough integral	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Stochastics and Dynamics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219493724500060	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Yu, Sera Toru, Yano Kouji	4. 巻 36
2. 論文標題 Resolution of Sigma-Fields for Multiparticle Finite-State Action Evolutions with Infinite Past	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 1368 ~ 1399
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10959-022-01219-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Yu	4. 巻 77
2. 論文標題 BACKWARD REPRESENTATION OF THE ROUGH INTEGRAL: AN APPROACH BASED ON FRACTIONAL CALCULUS	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 367 ~ 384
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.77.367	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Yu	4. 巻 73
2. 論文標題 Integration with respect to Hoelder rough paths of order greater than 1/4: an approach via fractional calculus	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Collectanea Mathematica	6. 最初と最後の頁 13 ~ 42
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13348-020-00305-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Yu	4. 巻 72
2. 論文標題 Rough integration via fractional calculus	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 39～62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj/1585101620	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Ito Yu
2. 発表標題 A fractional calculus approach to rough path integration
3. 学会等名 The 7th International Conference on Random Dynamical Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤悠
2. 発表標題 Backward representation of rough integral: an approach via fractional calculus
3. 学会等名 岡山 確率解析ワークショップ2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤悠
2. 発表標題 Backward representation of rough integral: an approach via fractional calculus
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤悠
2. 発表標題 Integration with respect to Hoelder rough paths of order greater than 1/4: an approach via fractional calculus
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ito Yu
2. 発表標題 A fractional calculus approach to rough path integration
3. 学会等名 One day workshop on stochastic analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ito Yu
2. 発表標題 Integration with respect to Hoelder rough paths of order greater than 1/4: an approach via fractional calculus
3. 学会等名 International Workshop on Stochastic Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤悠
2. 発表標題 Rough path theory via fractional calculus
3. 学会等名 確率論早春セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ito Yu
2. 発表標題 A fractional calculus approach to rough path integration
3. 学会等名 Second Interdisciplinary and Research Alumni Symposium iJaDe2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ito Yu
2. 発表標題 Integration with respect to Hoelder rough paths of order greater than 1/4: an approach via fractional calculus
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ito Yu
2. 発表標題 Integration with respect to Hoelder rough paths of order greater than 1/4: an approach via fractional calculus
3. 学会等名 Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------