

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：37111

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13435

研究課題名（和文）拡散方程式と非線形境界条件の数学解析

研究課題名（英文）Analysis on diffusion equations and nonlinear boundary conditions

研究代表者

佐藤 龍一（Sato, Ryuichi）

福岡大学・理学部・助教

研究者番号：20802599

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、広く非線形な拡散方程式の解の存在理論を主に扱った。最も基本的な拡散方程式は線形の方程式であり、非常に様々な研究がなされてきたため色々な取り扱い方が知られている。しかし、拡散を表す項が非線形になると様々な制約を受け、解が存在するかどうかは明らかではなくなってしまう。そのため、本研究では非線形な拡散項をもつ方程式と、（非線形な）境界条件に着目して解が存在することを証明するための手法の開発などを行った。結果的にいくつかの成果を得たので、今後幅広い研究に役立てられると期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた成果の立ち位置は非線形偏微分方程式の中でも最も基本的なものである。しかしながら、これらの成果は今後の研究で扱われるであろう諸問題を考察する際の指針になるものであり、学術的意義は十分にあるものと考えられる。実際、新たな解の存在手法を獲得したことで考察可能な問題設定は広がっているため、今まで考察されなかった問題も研究対象と認識され、研究が活発化すると期待している。本研究での成果が直ちに社会的に影響を与えることはないと考えられるが、将来的に大きな影響をもたらす研究につながる可能性は高い。

研究成果の概要（英文）：In this research we investigate nonlinear diffusion equations and the theory of existence of solutions. For the linear diffusion equations, there are many methods and solutions to consider some problems. However, for nonlinear diffusion equations, we have to choose correct solutions to treat such equations. We obtained some methods and new approaches to treat nonlinear diffusion equations. It can be expected that our results are applicable to expansive research.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形拡散方程式 時間大域解 粘性解

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初は非線形な拡散効果をもつ方程式に非線形な境界条件を課した問題の解が二つの非線形性によりどのようなことが起こるかを調べることに主眼があった。研究を進めるうちに非線形な拡散効果をもつ方程式の解の存在を証明する手法そのものが必要となり、既知の手法で簡単に解を構成できない問題を研究対象とした。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は非線形な拡散効果と境界条件、または低階の非線形性のバランスによって解の振る舞いがどのように変化するかを明らかにすることである。

## 3. 研究の方法

多孔質媒質方程式や  $p$ -ラプラス型方程式のような高階の項に非線形性を有する準線形放物型方程式の解を構成する際には半線形方程式の解析手法を直接的に適用することができない場合があるため、解の概念として弱解を採用し、その存在を示す。これらを実行するためには既存の方法を適用するだけではうまく行かない場合が多いため、解の存在を示す手法自体も開発することとなる。

## 4. 研究成果

本研究を遂行中に得られた成果は種々の非線形拡散方程式(系)の解の存在に関する理論構築や、それを応用して得られる諸結果である。より具体的に扱った内容を以下に記す。

- (1) 速い拡散と非線形境界条件を持つ問題の時間正值大域解の存在・非存在に関する臨界指数の決定
- (2) 低階の非線形項をもつ拡散方程式の時間局所解及び大域解の存在
- (3) 遅い拡散と低階の非線形項をもつ問題の解の存在
- (4) (3)の応用として解の最大値が有限時間で無限大に発散する場合に尺度不変となる臨界ノルムの発散が起きるための十分条件
- (5) 比較原理から ODE の解のように振る舞う  $p$ -ラプラス型方程式の解の大域挙動
- (6) 完全非線形放物型方程式系の時間大域解の構成

などである。  
以下に概略を述べる。

(1)では境界条件に解の増大を促す非線形項をもち、領域内部では速い拡散と言われる効果を持つ拡散方程式の解の存在を、領域が球の内部、領域が球の閉包の外部領域の場合を扱った。領域内部では強い拡散効果が働くが、境界上では解を増大させる効果が発揮されるため、領域によって状況が大きく変わる。実際、領域が有界な場合、境界条件によって解の増大が促される一方で、領域内部ではいくら拡散しようとしても行き場がないため、全ての正值解は有限時間で爆発する。一方で、外部領域を考えると、境界条件が効力を発揮するのは有界な範囲にとどまり、一方で拡散効果は無制限遠方まで働くようになるため、拡散効果が優位な状況となるため、時間大域解が存在することが示された。

(2)では、1階の微分を含む非線形項を伴う非線形拡散方程式の初期値問題を考察した。この問題は全ての定数が解になる一方で、一般に比較原理の成立が期待できないため、解の構成を行うためには積分方程式に書き直す手法を採用した。初期値問題の解の構成は特異性が無く、遠方で速い減衰をする初期値に対して存在する強解を経由して、局所一様ルベーク空間の中で解の存在を得た。考察対象の方程式の解は有限時間で無限大に発散することは期待されないが方程式の持つ尺度不変性から時間大域解の存在を示すためには初期値の小ささが必要となっている。この点に関しては様々な方向に課題が残されており、今後も関連研究を進めることが可能と考えている。

(3)ではいわゆる多孔質媒質型の方程式に未知関数の冪乗を加えた方程式の初期値問題の解の存在を局所一様ルベーク空間の枠組みで扱った。一般に拡散方程式の初期値問題の解が存在するかどうかを考察する際は、初期値の空間局所的な特異性や空間遠方での増大度が重要となる。ここで扱った問題は拡散効果がある意味で弱いため、線形な拡散効果の場合とは異なる状況が生じる。それが拡散の効果を表す指数として結論に変化を与えているのである。また、非線形拡散であることからいわゆる軟解として扱うことが難しいため、超関数の意味で解を考えるなどの必要性もある。さらに、尺度不変は空間のノルムを扱う手法が確立されていなかったためそれを解決する必要もあった。この成果はそれらの困難を解決したものである。尺度不変な臨界ノルムを扱えるようになったため、(4)として爆発解の臨界ノルムが同時に発散していることを保証する十分条件を得た。

(5)では漸近挙動の主要項が対応するODEのようになる非線形拡散方程式の初期値問題(pラプラシアン型)の解の詳細な挙動について解析を行った。類似の多孔質媒質方程式とは漸近先が熱核とZKB解とで異なることが示された。

(6)では完全非線形放物型連立系の非負値時間大域解の存在を示した。当初は存在・非存在を分ける臨界指数が決定できると考えて取り組んでいたが、現状ではかなり困難であると判断し、存在に関する十分条件を得るにとどまった。それでもなお、連立系でありかつ異なる拡散効果をもつ場合も対象としているため、既存の手法はほぼ機能しない。そこで優解を構成することで時間大域解の存在を示すことに成功した。

これら一連の成果は方程式だけを見ていると幅広い問題を扱っているように見えるが、いずれも拡散効果と何らかの非線形性のバランスによってどのような変化があるかという点に着目していることは共通している。実際に研究を遂行するためには個々の方程式(や境界条件)特有の扱いの難しさなどから色々な手法を用いて解決にあたることとなった。結果的には当初の目的は一定程度達成できており、また次の研究課題もいくつか見つかっているので成果としては十分なものとなったと考えている。本研究で得られた知見が今後の研究に貢献していくことが期待される。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Md. Rabiul Haque, Norisuke Ioku, Takayoshi Ogawa, Ryuichi Sato.	4. 巻 34
2. 論文標題 Well-posedness of the Cauchy problem for convection-diffusion equations in uniformly local Lebesgue spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Differential Integral Equations	6. 最初と最後の頁 223, 244
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Rabiul Haque Md., Ogawa Takayoshi, Sato Ryuichi	4. 巻 19
2. 論文標題 Existence of weak solutions to a convection diffusion equation in a uniformly local lebesgue space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 677 ~ 697
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/cpaa.2020031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sato Ryuichi	4. 巻 484
2. 論文標題 Existence of solutions to the slow diffusion equation with a nonlinear source	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 123721 ~ 123721
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2019.123721	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sato Ryuichi, Takahashi Jin	4. 巻 482
2. 論文標題 Critical exponents for the fast diffusion equation with a nonlinear boundary condition	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 123526 ~ 123526
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2019.123526	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 E. Junyong, R. Sato	4. 巻 19
2. 論文標題 Large time behavior of ODE type solutions to parabolic $p \text{ Laplacian type equations}$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 4373 ~ 4386
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2020199	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kosugi Takahiro, Sato Ryuichi	4. 巻 181
2. 論文標題 Existence of Global-in-Time Solutions to a System of Fully Nonlinear Parabolic Equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Acta Applicandae Mathematicae	6. 最初と最後の頁 1-24
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10440-022-00533-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 佐藤龍一
2. 発表標題 完全非線形放物型連立系の時間大域解の存在
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤龍一
2. 発表標題 Existence of solutions to the slow diffusion equation with a nonlinear source
3. 学会等名 第253回広島数理解析セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤龍一
2. 発表標題 On existence of solutions to a system of fully nonlinear parabolic equations
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ryuichi Sato
2. 発表標題 Existence of solutions to the slow diffusion equation with a nonlinear source
3. 学会等名 青葉山勉強会 (第16回) “Reaction-Diffusion Equations” (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ryuichi Sato
2. 発表標題 Existence of solutions to the slow diffusion equation with a nonlinear source
3. 学会等名 福岡大学解析セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ryuichi Sato
2. 発表標題 Existence of solutions to a nonlinear diffusion equation in uniformly local Lebesgue space
3. 学会等名 福岡大学理学部応用数学科 談話会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ryuichi Sato
2. 発表標題 非線形境界条件付き拡散方程式の解の存在と爆発
3. 学会等名 第10回非線形発展方程式セミナー@KUE
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐藤龍一
2. 発表標題 Existence of solutions to the slow diffusion equation with a nonlinear source
3. 学会等名 第166回神楽坂解析セミナー
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 佐藤龍一
2. 発表標題 Existence of solutions to the slow diffusion equation with a nonlinear source
3. 学会等名 偏微分方程式セミナー
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Ryuichi Sato
2. 発表標題 Global existence in critical space for a nonlinear diffusion equation with a nonlinear source
3. 学会等名 The AIMS Conference series on dynamical systems and differential equations, Asymptotics for Nonlinear Diffusion Equations and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤龍一
2. 発表標題 Local and global existence of slow diffusion equation with a nonlinear source
3. 学会等名 2019年日本数学会年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------