

令和 6 年 8 月 22 日現在

機関番号：12701

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2023

課題番号：18K13439

研究課題名（和文）非圧縮性粘性流体の領域摂動に関する諸問題の数理解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of problems related to the incompressible viscous fluid under the domain perturbation

研究代表者

牛越 恵理佳（Ushikoshi, Erika）

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・准教授

研究者番号：20714041

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究においては、流体力学の基礎方程式として知られているストークス方程式に対する領域摂動問題を数理解析的手法により考察する。具体的には、領域の汎関数と呼ばれているグリーン関数や固有値が領域の摂動に伴い、どのような変化をするかを解析する。アダマール変分公式は領域形状と固有値などとの関係を表す重要な道具として知られており、本研究では同公式を用いて「領域形状」と「流れ(流体の速度ベクトル)」の関係性を中心に解析を行う。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体力学における領域摂動問題は、理論的側面だけではなく応用についても非常に重要な問題と言える。本研究では、アダマール変分公式導出の見地から数理解析的手法により同問題や関連する領域摂動問題のスペクトル解析について取り組むことを目指している。そして実際に、本研究を通してストークス方程式のアダマール変分公式に対する基礎理論の考察や、均質等方弾性体の固有振動の新規課題について研究成果を上げることに成功している。

研究成果の概要（英文）：In this study, we consider the domain perturbation problem for the Stokes equations, which are known as the fundamental equations of fluid mechanics by the mathematical analysis. In particular, we analyze how the Green functions and eigenvalues changes under the domain perturbation. Hadamard variational formula plays an important role to investigate the relation between eigenvalues and the topological type of the domain. In this topic, we analyze the relation between “domain shape” and “flow (velocity vector of fluid)” by using this formula.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：領域摂動 ストークス方程式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

流体力学における領域摂動問題は、例えば、人工血管の形状決定の問題など、理論的側面だけではなく、応用の観点からも非常に重要な問題意識と言える。アダマール変分公式というものは、「固有値」と「領域形状」の双方をつなぐ役割を果たす重要な道具として、これまで数多くの研究成果が挙げられてきた。本研究においては、同公式導出の観点から、主に流体力学における領域摂動問題へアプローチしていく。また、同問題と関連した領域摂動におけるスペクトル解析を行う。

アダマール変分公式は、楕円型方程式の中で最も基本的な方程式として知られているラプラス方程式に対して Hadamard (Memoresis des Savants Etrangers, 1908) で導出されて以来、領域形状のデザイン問題の解析などに応用され、Fujiwara-Tanikawa-Yukita (Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1978) を始め数多くの研究が展開されている。しかしながら、流体力学の基礎方程式であるストークス方程式に対しては、Jimbo-Ushikoshi (Far East J. Math. Sci., 2015) による変分公式の導出から、その応用である Jimbo-Kozono-Teramoto-Ushikoshi (Math. Ann., 2017) などが近年発表されてきたもののその数は少なく、同分野の「基礎理論の充実」と「その応用」これら双方の研究の遂行が重要であると考えられていた。

### 2. 研究の目的

本研究においては、ストークス方程式のアダマール変分公式の「基礎理論の充実」と「その応用」について、流体力学における領域摂動問題への新しいアプローチを確立すること、および関連する問題についての領域摂動におけるスペクトル解析を行うことを目的とする。具体的には、次の2点

- (1) 領域摂動に対するストークス方程式の固有値変分の解析に関する基礎理論の構築
- (2) 領域摂動問題に対する諸問題の解析  
に焦点をあて研究を遂行する。

(1) については、固有値変分からの領域形状決定の問題への応用の基礎となる問題について取り組む。これについては、先行研究である Jimbo-Kozono-Teramoto-Ushikoshi (Math. Ann., 2017) によって、ディリクレ境界条件を課したストークス方程式の多重度のある固有値の変化がないような3次元有界領域の境界が、トーラスと同相になることが明らかになった。しかしながら、この結果は3次元に限定した議論であり、2次元や4次元以上の領域の幾何学的特徴付けがなされておらず課題になっている。一方、ラプラス方程式の固有値について、Ozawa (Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1979) においては、熱核のトレースの  $t \rightarrow 0$  における漸近展開公式を用いることで、任意次元の領域形状について言及している。そのため非定常ストークス方程式の変分公式の導出が、同方程式の固有値の変分による任意次元の領域形状決定の問題への鍵を握ると考えられる。また、自由境界値問題への応用を見据え部分的スリップ境界条件を課した場合のストークス方程式の固有値問題についても考察する。

(2) については、関連する領域摂動問題として、断面が非一様な均質等方弾性体の変形に対する固有振動の漸近解析について研究を行う。同問題について、とても細い板状の弾性体の固有振動の解析は Ciarlet-Kesavan (Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1981) を始め大変多くの研究がある。しかし、とても細い柱状の弾性体の場合は、数学的な取り扱いの困難さがあるため遅れて研究がなされ Kerdid (C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, 1993) などにより、断面が一様な柱状弾性体についての固有値の漸近展開の研究成果がある。そして近年になって Jimbo-Rodriguez Mulet (J. Math. Soc. Japan, 2020) によって、断面が非一様な柱状弾性体の小さな固有値に対する考察がなされた。同論文においては、断面の  $xy$  方向に関して、同じ比率で太さに違いのある弾性体の固有値の比較が考察されている。一方、断面が  $xy$  方向に関して極端なアスペクト比を持つような場合については明らかになっておらず本研究ではその解析を行う。

### 3. 研究の方法

(1) 領域摂動に対するストークス方程式の固有値変分の解析に関する基礎理論の構築  
ディリクレ境界条件を課した非定常ストークス方程式の基本解に対するアダマール変分公式の導出を行う。これについて、定常問題のグリーン関数に対する変分公式は、Fujiwara-Ozawa (Proc. Japan Acad., Ser. A, 1978) の手法を土台に、Ushikoshi (Manuscr. Math., 2015) の一連の研究で明らかにされている。その際に鍵を握ったのはアプリアリ評価による領域摂動パラメー

タに関する一様評価の導出である。また、ディリクレ境界条件を課した熱方程式の基本解に対する変分公式を導出した Ozawa(J. Math. Soc. Japan, 1982)においてもアプリオリ評価を用いることで基本解の領域依存性を明らかにしている。そこで、本研究においては、Solonnikov(J. Sov. Math., 1977)のアプリオリ評価を用いて、非定常ストークス方程式の基本解の領域依存性について解析を行い、さらに部分積分による式変形を行うことで変分公式の明示的な表現を導出することを目指す。また、自由境界値問題への応用の観点から、境界の摩擦の影響も加味したスリップ境界条件下におけるストークス方程式の固有値に対して、固有値と固有関数がどれくらい境界の摩擦の影響を受けるかについて詳細に考察する。

#### (2) 領域摂動問題に対する諸問題の解析

Jimbo-Rodriguez Mulet (J. Math. Soc. Japan, 2020)では、現代の変分的手法を用いて既存の研究の手法を整備することによって、3次元の特に「断面が非一様な」柱状弾性体の解析を可能にした。具体的には、弾性体の固有値は2乗のオーダーで小さくなり、その際の主要項の係数は4階の常微分方程式の固有値として特徴付けられることを明らかにした。ここで、この常微分方程式の係数は元の弾性体の断面によって定まる関数で与えられている。このような固有値のオーダーと、その係数の特徴付けを行うためには、リファレンス領域へのスケール変換の設定と、その変換で得られる弾性体のエネルギーの式から、極限関数と固有値の主要項についての関係式を抜き出すための良いテスト関数の構成が重要であった。本研究で取り扱った弾性体の断面が $xy$ 方向に関して極端なアスペクト比を持つような場合については、既存の研究と本質的に異なる現象を扱うことになるため、まずは Jimbo-Rodriguez Mulet (J. Math. Soc. Japan, 2020)の解析方法のエッセンスを見極めることで証明の簡略化を目指し、テスト関数の構成方法について検討していくことを目的とした。

### 4. 研究成果

#### (1) 領域摂動に対するストークス方程式の固有値変分の解析に関する基礎理論の構築

Ozawa(J. Math. Soc. Japan, 1982)の手法を土台に、ディリクレ境界条件を課した非定常ストークス方程式の基本解について考察を行なった。同問題においては前述の通りアプリオリ評価を用いた基本解の領域依存性の解析が重要な鍵を握る。ラプラス方程式の場合のアプリオリ評価は、解が「外力」と「境界値」によって制御されているため、領域の依存性が既知関数により書き換えることができた。しかしながら、ストークス方程式の場合は、非圧縮条件を満たさない一般の外力に対しては、未知関数を制御するために「境界データ」に加えて「外力の射影成分」のノルムが必要になる。これが、領域依存性の解析を最も困難にしている点といえる。その為、ストークス方程式の場合においては、外力の射影成分の評価を領域依存性の解析を含め別途考察する必要がある。これは本質的に楕円型方程式の解の領域依存性の解析が新たに必要となることを意味しており、本研究により継続して議論が必要になる点を明確化することができた。また、境界の摩擦の影響も加味したスリップ境界条件下においてストークス方程式の固有値と固有関数がどれくらい境界の摩擦の影響を受けるかについては、Max-Min法を用いた固有値の連続性の解析と共に、同方程式に関連する双線形形式の領域依存性パラメータの一様評価のより詳細な議論が必要であることが明らかになった。

#### (2) 領域摂動問題に対する諸問題の解析

Jimbo-Rodriguez Mulet (J. Math. Soc. Japan, 2020)の手法を土台に、断面が非一様な柱状弾性体の小さな固有値に対して考察した。本研究においては、 $xy$ 方向に関して極端なアスペクト比を持つような場合を取り扱ったため、既存研究で用いられた極限関数の形をしたテスト関数をそのままに用いると固有値の極限值を含んだ関係式の導出のために必要な条件を得ることができない。そのため、既存の研究における本質的なアイデアを抽出し、証明の改良を含め考察し直すことを考えた。そこで、まずは既存の研究において、固有値の極限値の条件式の導出方法について、レイリー商からなる汎関数のミニマイザーをテスト関数として選ぶことで、余分な項に対する議論を介さず必要な条件式を導出することができないかという着想に至り、既存の研究の証明の簡略化に成功した。この議論を礎に、本研究で考察する問題のテスト関数の構成を行うことで、部分的に必要な条件式の導出をすることができた。そのため、後は試行錯誤を重ね、もう一つ補助的にテスト関数を構成することで、固有値の極限値の関係式の導出に成功した。これらの思考を経て、結局、固有値は収縮の度合いが大きい方の影響を受けて小さくなることが明らかになった。また、その主要項は Jimbo-Rodriguez Mulet (J. Math. Soc. Japan, 2020)と同様に、4階の常微分方程式によって特徴付けられることも証明できた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kozono, Hideo and Ushikoshi, Erika and Wakabayashi, Fumitaka	4. 巻 342
2. 論文標題 Removable time-dependent singularities of solutions to the Stokes equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 472-489
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2022.10.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jimbo Shuichi, Ushikoshi Erika, Yoshihara Hiromasa	4. 巻 62
2. 論文標題 Asymptotic behavior of the eigenfrequencies of a thin elastic rod with non-uniform cross-section of extremely oblate shape	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-022-02325-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ando, Kazunori and Kang, Hyeonbae and Miyanishi, Yoshihisa and Ushikoshi, Erika	4. 巻 147
2. 論文標題 The first Hadamard variation of Neumann-Poincare eigenvalues on the sphere	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1073-1080
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14246	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 9件／うち国際学会 2件）

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 Asymptotic behavior of the eigenfrequencies of a thin elastic rod with non-uniform cross-section of extremely oblate shape
3. 学会等名 愛媛大学数学談話会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 極端なアスペクト比を伴う断面をもつ細い弾性体に関する固有値問題
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 極端なアスペクト比を伴う断面をもつ細い弾性体に関する固有値問題
3. 学会等名 微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 極端なアスペクト比を伴う断面をもつ細い弾性体に関する固有値問題
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 極端なアスペクト比を伴う断面をもつ細い弾性体に関する固有値問題
3. 学会等名 第11回室蘭非線形解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Erika Ushikoshi
2. 発表標題 Hadamard variational formula for the fundamental solution of the non stationary Stokes equations
3. 学会等名 RIMS共同研究「非圧縮性粘性流体の数理解析」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 Hadamard variational formula for the fundamental solution of the non stationary Stokes equations
3. 学会等名 自由境界問題に対する反復法の理論的および数値解析的研究
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 ストークス方程式の領域摂動問題について
3. 学会等名 自由境界問題に対する反復法の理論的および数値解析的研究
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Erika Ushikoshi
2. 発表標題 Hadamard variational formula for the multiple eigenvalues of the Stokes equations with friction slip boundary conditions
3. 学会等名 Waseda Workshop on Partial Differential Equations 2019 (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Erika Ushikoshi
2. 発表標題 Hadamard variational formula for the Stokes equations with friction slip boundary conditions
3. 学会等名 若手による流体力学の基礎方程式の研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Erika Ushikoshi
2. 発表標題 Hadamard variational formula for the multiple eigenvalue of the Stokes equations with slip boundary conditions
3. 学会等名 波動・振動・流れの制御と逆問題 -理論と数値計算-（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Erika Ushikoshi
2. 発表標題 Hadamard variational formula for the multiple eigenvalue of the Stokes equations with friction slip boundary conditions
3. 学会等名 2018年度明治非線型数理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Erika Ushikoshi
2. 発表標題 Hadamard variational formula for the multiple eigenvalue of the Stokes equations with friction slip boundary conditions
3. 学会等名 Workshop on the Navier-Stokes flow（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 牛越恵理佳
2. 発表標題 フリクション付きスリップ境界条件を課したストークス方程式の多重度のある固有値に対するアダマール変分公式について
3. 学会等名 自由境界問題に対する反復法の理論的および数値解析的研究
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 茨木貴徳・牛越恵理佳・竹居正登・原下秀士	4. 発行年 2022年
2. 出版社 培風館	5. 総ページ数 246
3. 書名 微分積分学概論	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------