

令和 4 年 4 月 27 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13441

研究課題名（和文）対数型スケール変換が拓く関数不等式の新展開と偏微分方程式への応用

研究課題名（英文）Functional inequalities via a logarithmic transformation and its application to PDE

研究代表者

猪奥 倫左（IOKU, NORISUKE）

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：50624607

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：ツァリス統計力学とボルツマン統計力学の関連から着想を得て、対数型特異性を伴う臨界Sobolevの不等式（Alvinoの不等式）を直接極限として持つ形のスケール不変Sobolev不等式を導出した。これは非線形スケール不変性の観点から臨界問題を劣臨界問題の連続極限として記述したものである。さらに一般の非線形項を持つ半線形熱方程式に対して、擬スケール不変性を駆使することで、特異定常解の存在、即時爆発を起こすための最適な初期値の特異性、大域可解性のためのFujita指数の同定、第二次近似量、を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では一貫して非線形問題のスケール不変構造に着目し、劣臨界・臨界関数不等式の橋渡しを与えるとともに、モデルケースである冪乗型非線形項に対して得られていた半線形熱方程式に対する結果を一般の非線形項に拡張した。スケール不変性の観点から非線形構造の主要部と剰余項を分ける方法が構築された点が意義深い。また、背後にTsallis, Boltzmann統計力学が潜むことから、関連諸分野への波及効果も期待できる。

研究成果の概要（英文）：Inspired by a relationship between Tsallis statics and Boltzmann statics, we proposed a scale invariant form of Sobolev inequalities which converges to the limiting case of Sobolev inequalities (Alvino's inequality). This result means that the critical problem can be approximated via a direct limiting procedure of a subcritical problem in the sense of scale invariant structure.

Furthermore, we concerned semilinear heat equations with a general nonlinearity and revealed by focusing a quasi scale invariance that an existence of a singular stationary solution, an optimal singularity of an initial data such that an instant blow-up occurs, the Fujita exponent for a general nonlinearity, a second exponent in the sense of a quasi scaling.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形スケール不変性 擬スケール不変性 自己相似性 半線形熱方程式 関数不等式

### 1. 研究開始当初の背景

臨界次元における偏微分方程式を解析する際には対数型特異性が現れることが知られており、この特異性は通常のスケール不変構造を壊すために各種の解析を困難にする。一方、最近の研究により対数関数に適合した非線形スケール不変性が発見されたが、その応用可能性や通常のスケール不変性との関係は明らかにされていなかった。

### 2. 研究の目的

そこで本研究では、

- ・二つのスケール則を統一的に記述する基礎理論を構築し、
- ・それを用いて劣臨界・臨界状態を統一する包括的な関数不等式を確立して、
- ・応用として対数型特異性を伴う臨界偏微分方程式の解析手法を開拓することを研究目的とした。

### 3. 研究の方法

研究には、Tsallis 統計力学において提案された  $q$ -指数関数、 $q$ -対数関数と、Fujishima-Ioku により定義した擬スケール不変性、を用いた。これらの変換を駆使しながら、共同研究者である Fujishima, Ruf, Terraneo, Cianchi, Hashizume らと、可能な場合は対面で、不可能な場合は zoom により研究打ち合わせを密に行い、上記の研究目的達成に挑んだ。

### 4. 研究成果

得られた結果は以下の通りである。

- ・N. Ioku, Attainability of the best Sobolev constant in a ball, *Mathematische Annalen* 375 (2019), 1--16.

球上での非線形スケール不変性を一般の積分指数を持つ Sobolev 空間に対して導出し、それを用いて劣臨界 Sobolev 不等式から臨界 Sobolev の不等式として知られる Alvino 不等式を導出した。これはスケール不変則の理解が進んだことにより臨界問題を劣臨界問題の直接極限として記述した事例となっている。

- ・N. Ioku, B. Ruf, E. Terraneo, Non-uniqueness for a critical heat equation in two dimensions with singular data, *Annales de l'Institut Henri Poincaré/Analyse Non Linéaire*, 36 (2019) 2027--2051.

特異な初期値に対する半線形熱方程式の適切性問題は、3 次元以上の場合には Weissler, Brezis--Cazenave, Ni--Sacks らによって解決されている。

本論文では空間 2 次元において同問題を考察し、解の存在・一意性に対する閾値を決定した。

- ・Md. R. Haque, N. Ioku, T. Ogawa, and R. Sato, Well-posedness of the Cauchy problem for convection-diffusion equations in uniformly local Lebesgue spaces, *Differential and Integral Equations*, 34(2021), 223--244.

Convection--Diffusion 方程式の Well--posedness を Uniformly local Lebesgue 空間において証明した。

- ・Y. Fujishima, N. Ioku, Solvability of a semilinear heat equation via a quasi scale invariance, *Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, (2021), Volume 176 of the series 97--120.

一般の単調凸な非線形項を持つ半線形熱方程式に対して、即時爆発を起こすための初期値の特異性を非線形項を用いて明示した。

- ・Y. Fujishima, N. Ioku, Global in time solvability for a semilinear heat equation without the self-similar structure, *Partial Differential Equations and Applications*, 3 (2022), no. 2, Paper No. 23.

べき乗非線形項に対して知られている有限時刻爆発と時間大域存在の閾値（いわゆる Fujita 指数）に相当する量を、一般の単調凸な非線形項に対して同定した。

以上の結果をまとめると以下のようになる：

臨界関数不等式である Alvino の不等式を劣臨界版 Sobolev 不等式の連続極限として記述することに成功した。一方で、具体的な関数不等式に対しては成功したものの、一般的手法の開発には至っていない。

冪乗型の非線形項を持つ明示的なスケール不変則、およびそれに立脚した各種の議論を、一般の凸非線形項に対する手法へと拡張した。より詳細には、非線形項をスケール則の意味における主

要部と剰余項に分ける手法を開発し，これを用いて Fujishi 指数の一般化，一意性・非一意性の分類，即時爆発が起こるための初期値の条件付け，特異定常解の構成，を一般の非線形項に対して証明した．

また，4 件の国際会議における招待講演で得られた結果を発表した．また 2021 年度日本数学会年会において関数方程式論分科会特別講演にて得られた成果を発表した．

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Y. Fujishima and N. Ioku	4. 巻 3
2. 論文標題 Global in time solvability for a semilinear heat equation without the self-similar structure	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 Paper No. 23
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-022-00158-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Y. Fujishima, N. Ioku	4. 巻 176
2. 論文標題 Solvability of a semilinear heat equation via a quasi scale invariance	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 97--120
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Md. R. Haque, N. Ioku, T. Ogawa, R. Sato	4. 巻 34
2. 論文標題 Well-posedness of the Cauchy problem for convection-diffusion equations in uniformly local Lebesgue spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 223--244
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 N. Ioku, B. Ruf, E. Terraneo	4. 巻 36
2. 論文標題 Non-uniqueness for a critical heat equation in two dimensions with singular data	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincaré/Analyse Non Linéaire	6. 最初と最後の頁 2027--2051
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 N. Ioku	4. 巻 in press
2. 論文標題 Attainability of the best Sobolev constant in a ball	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 in press
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-018-1776-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 猪奥倫左
2. 発表標題 Sobolev型不等式の最良定数と達成可能性
3. 学会等名 日本数学会函数方程式論分科会 特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 猪奥倫左
2. 発表標題 Solvability of a semilinear heat equation via a quasi scale invariance'
3. 学会等名 Variational analysis on critical problems of nonlinear partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年 ~ 2020年

1. 発表者名 猪奥倫左
2. 発表標題 Solvability of a semilinear heat equation via a quasi scale invariance
3. 学会等名 2019 Taiwan Mathematical Society Annual Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年 ~ 2020年

1. 発表者名 猪奥倫左
2. 発表標題 Attainability of the best Sobolev constant in a ball
3. 学会等名 Geometry and Analysis, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 猪奥倫左
2. 発表標題 Attainability of the best Sobolev constant in a ball
3. 学会等名 VI Italian-Japanese Workshop, Geometric properties for parabolic and elliptic PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 N. Ioku
2. 発表標題 Remark on a Sobolev type inequality in a ball
3. 学会等名 AIMS 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------